



Mathématiques

Les Marronniers

Fiche de synthèse

Numéro 01

- *Document de référence*
- *Mémo – vecteurs, droites et plans dans l'espace*
- *Vecteurs – exercices – partie 2*
- *Vecteurs – matrice – exemple – concret*

1	Plan du document	2
2	Les expressions littérales	3
2.1	Les fractions	3
2.2	Les puissances	3
2.3	Les racines carrées	3
2.4	Les logarithme népérien et les exponentielles	4
2.4.1	Définition	4
2.4.2	Opérations	4
2.5	Le calcul littéral	5
3	Les équations et inéquations	5
3.1	Niveau I	6
3.2	Niveau II	6
4	Les dérivées	7
4.1	Dérivées des fonctions élémentaires	7
4.2	Dérivées et opérations sur les fonctions	7
5	Les primitives	8
5.1	Primitives de fonctions composées	8
5.2	Primitives de fonctions usuelles et Opération sur les fonctions	8
6	Développement limités	10

2.1 Les fractions

Les nombres premiers

Les nombres premiers sont ceux qui n'ont pas d'autre diviseur que 1 ou eux même et tous impairs sauf 2.

Exemple : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, et 97.

Décomposition en facteurs premiers

$$60 = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 15 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 2^2 * 3 * 5 \qquad 40 = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 2^3 * 5$$

Calcul du PPMC Le Plus Petit Multiple Commun

Le produit des facteurs **distincts** avec le plus **grand** exposant : $PPMC(60;40) = 2^3 * 3 * 5 = 120$

Calcul du PGDC Le Plus Grand Dénominateur Commun

Le produit des facteurs **communs** avec le plus **petit** exposant : $PPMC(60;40) = 2^2 * 5 = 20$

Double division d'une fraction

$$\frac{5}{7} \div \frac{-9}{2} = \frac{5}{7} * \frac{-2}{9} = \frac{-10}{63}$$

2.2 Les puissances

$$x^{a+b} = x^a * x^b \quad x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b} \quad (a * b)^n = a^n * b^n$$

$$\text{n, pair} \quad -3^2 = +9 \quad \text{n, impair} \quad -3^3 = -27$$

$$x^3 * x^{30} = x^{3+30}$$

$$3^0 = 1 \quad 1^5 = 1 \quad 3^{-6} = \frac{1}{3^6} \quad 3^0 \quad (x^a)^b = x^{a*b} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\text{Note: } \frac{5 * 10^{-7} * 8 * 10^3}{4 * 10^{-10}} = \frac{40 * 10^{-4}}{4 * 10^{-10}} = 10 * 10^{-4-(-10)} = 10 * 10^6 = 10^7$$

$$\text{Note: } \frac{81^{-3} * 9^5}{27^2} = \frac{(3^4)^{-3} * (3^2)^5}{(3^3)^2} = \frac{3^{-12} * 3^{10}}{3_6} = \frac{3^{-12+10}}{3^6} = \frac{3^{-2}}{3^6} = 3^{-2-6} = 3^{-8}$$

2.3 Les racines carrées

$$\sqrt{a * b} = \sqrt{a} * \sqrt{b} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \sqrt{n^2} = n \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Note: } 8 = 2^3 \text{ donc } (x+1)^3 = 8 \Rightarrow x = 1$$

2.4 Les logarithme népérien et les exponentielles

WP-CMS

2.4.1 Définition

$\ln$	$\exp$	Notes
$\ln 1 = 0$	$e^1 = e$	–
$\ln 0$ n'est pas définie	$e^0 = 1$	–
$\ln e = 0$	–	–
$\ln \frac{1}{e} = -1$	–	–
$y = \ln x \quad \forall x > 0 \Leftrightarrow x = e^y$	–	–
$\ln e^x = x \quad \forall x$	–	–
$e^{\ln x} = x \quad \forall x > 0$	–	–

2.4.2 Opérations

$\ln$	$\exp$	Notes
$\ln a + \ln b = \ln(a * b)$	$e^{a+b} = e^a * e^b$	–
$\ln a - \ln b = \ln(\frac{a}{b})$	$\ln a - \ln b = \ln(\frac{a}{b})$	–
$-\ln a = \ln(\frac{1}{a})$	e^{-a}	–
$\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$	$\ln \sqrt{x}$	–
$\ln x^n = n \ln x$	$(e^a)^n = e^{a*n}$	–

Identités remarquables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Développement

RAS

Factorisation

- Facteur commun $3x+6 \rightarrow 3$ et $2x^2+3x \rightarrow x$

- Factoriser $\frac{3}{32}x + \frac{1}{8}y$ Facteur commun $\frac{1}{8}$ il faut alors diviser $\frac{3}{32}$ par $\frac{1}{8}$ c'est à dire $\frac{3}{32} \cdot \frac{8}{1}$ donc $\frac{1}{8}(\frac{3}{4}x + y)$.

3. LES ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS**Equations**

$$-(x-5)^2 = (x-5)(2x-3) \Rightarrow (x-5)^2 - [(x-5)(2x-3)] \Rightarrow (x-5)[(x-5) - (2x-3)] \text{ Solutions } \{-2; 5\}$$

$$-(x+1)^2 = (5x+3^2) \Rightarrow (x+1)^2 - (5x+3^2) \text{ donc } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Inéquations

$$-2(x-4) \leq (4x-5) \Rightarrow 2x-8 \leq 4x-5 \Rightarrow 2x-4x \leq 8-5 \Rightarrow -2x \leq 3$$

$$\Rightarrow \text{En modifiant le signe, on change le signe de l'inégalité } x \geq -\frac{3}{2} \text{ Pour rappel : } 1 \leq 2 \text{ et } -1 \geq -2 \text{ ou } -10x >$$

$$-10 \rightarrow x < 10 \text{ - Procédure}$$

3.1 Niveau I

WP-CMS

3.2 Niveau II

4.1 Dérivées des fonctions élémentaires

$f(x)$	$f'(x)$	Ensemble de dérivabilité
$x \longrightarrow k$	$x \longrightarrow 0$	$] -\infty, +\infty[$
$x \longrightarrow x$	$x \longrightarrow 1$	$] -\infty, +\infty[$
$x \longrightarrow \frac{1}{x}$	$x \longrightarrow -\frac{1}{x^2}$	$] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$
$x \longrightarrow x^n$	$x \longrightarrow nx^{n-1}$	$\mathcal{R}^*$ si $n < 0$ $\mathcal{R}$ si $n > 0$
$x \longrightarrow \sqrt{x}$	$x \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0, +\infty[$
$x \longrightarrow \sin(x)$	$x \longrightarrow \cos(x)$	$] -\infty, +\infty[$
$x \longrightarrow \cos(x)$	$x \longrightarrow -\sin(x)$	$] -\infty, +\infty[$
$x \longrightarrow \tan x$	$x \longrightarrow 1 + \tan^2 x$	$\mathcal{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathcal{Z} \right\}$
$x \longrightarrow e(x)$	$x \longrightarrow e(x)$	$\mathcal{R}$
$x \longrightarrow \ln(x)$	$x \longrightarrow \frac{1}{x}$	$] 0, +\infty[$

4.2 Dérivées et opérations sur les fonctions

Opérations	Formules
$u + v$	$u' + v'$
ku	ku'
$u - v$	$u' - v'$
$u * v$	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$
$x \longmapsto u(ax + b)$	$x \longmapsto au'(ax + b)$

5.1 Primitives de fonctions composées

$f(x)$	$F(x).$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}.$	$\sqrt{u}.$
$nu'u^{n-1}.$	$u^n.$
$u'e^u.$	$e^u.$
$\frac{u'}{u}.$	$\ln(u).$
$F \circ g * g'.$	$f \circ g.$

5.2 Primitives de fonctions usuelles et Opération sur les fonctions

$f(x)$	$F(x).$	Intervalle $I.$
a (constante)	$ax + C.$	$\mathcal{R}.$
X	$\frac{1}{2}x^2 + C.$	$\mathcal{R}.$
$x^2 n \in \mathcal{Z} - (-1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}x^2 + C.$	$\mathcal{R}$ si $n \geq 0$ $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ si $n < -1.$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C.$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[.$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C.$	$]0; +\infty[.$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C.$	$\mathcal{R} -]0; +\infty[.$
e^x	$e^x + C.$	$\mathcal{R}.$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C.$	$\mathcal{R}.$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C.$	$\mathcal{R}.$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C.$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; +\frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ avec $k \in \mathcal{Z}.$
$\ln(x)$	$x(\ln x - 1) + C.$	$]0; +\infty[.$

$f(x)$	$F(x)$.	Conditions. WP-CMS
$u' + v'$	$ax + C.$	$\mathcal{R}.$
$\lambda u'$	$\lambda u + C.$	λ réel.
$u'v + uv'$	$uv + C.$	..
$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v} + C.$	$\forall x$ dans I , $v(x) \neq 0$.
$(u' \circ v)v'$	$(u \circ v) + C.$	$\forall x$ dans I , $v(x) \neq 0$.
$u'u^n$ avec $n \in \mathcal{Z} - (-1)$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + C.$	Lorsque $n < -1$ $\forall x$ dans I , $u(x) \neq 0$.
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C.$	$\forall x$ dans I , $u(x) \neq 0$.
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C.$	$\forall x$ dans I , $u(x) \neq 0$.
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + C.$	$\forall x$ dans I , $u(x) > 0$ $\forall x$ dans I , $u(x) < 0$.
$u'e^u$	$e^u + C.$	..
$x \mapsto u(ax + b)$	$\frac{1}{a}u(ax + b) + C.$	u primitive de u sur I .

Rappel : formule de Taylor-Young.

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \sum(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \sum(n) = 0$$

$f(x)$	DL.
$f(x) = e^x.$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \sum(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \sum(n) = 0.$
$f(x) = \cos(x).$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \sum(x).$
$f(x) = \sin x.$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \sum(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \sum(n) = 0.$
$f(x) = \cosh(x).$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \sum(x).$
$f(x) = \sinh(x).$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \sum(x).$
$f(x) = (1+x)^\alpha.$	$+ \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} + x^n \sum(x).$
$f(x) = \sqrt{1+x}.$	$1 - x + x^2 + x^2 \sum(x).$