

Cours d'algèbre : Applications linéaires
Niveau Math Sup

Table des matières

1	Introduction	1
2	Définition	1
3	Exemples	1
3.1	Multiplication matricielle	1
3.2	Dérivation	2
3.3	Intégration	2
3.4	Contre-exemple	2
4	Propriétés fondamentales	2
5	Noyau et image	2
5.1	Noyau	2
5.2	Image	2
6	Injectivité et surjectivité	3
7	Rang	3
8	Théorème du rang	3
8.1	Exemple	3
9	Matrices d'applications linéaires	4
10	Composition	4
11	Endomorphismes et automorphismes	4
12	Changement de base	4
13	Interprétation géométrique	5
14	Exercices	5
15	Méthodologie	5
16	Pièges classiques	6
17	Conclusion	6

1 Introduction

Les applications linéaires constituent l'objet central de l'algèbre linéaire. Elles permettent de modéliser les transformations compatibles avec la structure vectorielle.

Elles interviennent dans :

- les systèmes linéaires ;
- les matrices ;
- la géométrie ;
- la diagonalisation ;
- les équations différentielles.

2 Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps \mathbb{K} .

Définition 2.1. Une application

$$f : E \rightarrow F$$

est dite **linéaire** si :

$$\forall x, y \in E, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

et

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

On peut condenser ces deux propriétés sous la forme :

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

3 Exemples

3.1 Multiplication matricielle

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

L'application

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad X \mapsto AX$$

est linéaire.

3.2 Dérivation

L'application

$$D : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], \quad P \mapsto P'$$

est linéaire.

3.3 Intégration

L'application

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

est linéaire.

3.4 Contre-exemple

L'application

$$f(x) = x^2$$

n'est pas linéaire.

En effet,

$$(x + y)^2 \neq x^2 + y^2.$$

4 Propriétés fondamentales

Proposition 4.1. Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire, alors :

$$f(0_E) = 0_F.$$

Démonstration. On écrit :

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0).$$

On simplifie par $f(0)$. □

Proposition 4.2. Pour tout $x \in E$,

$$f(-x) = -f(x).$$

Proposition 4.3. Pour toute famille (x_i) et tous scalaires (λ_i) ,

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) = \sum_i \lambda_i f(x_i).$$

5 Noyau et image

5.1 Noyau

Définition 5.1. Le noyau de f est :

$$\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}.$$

5.2 Image

Définition 5.2. L'image de f est :

$$\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

Théorème 5.3. $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels.

6 Injectivité et surjectivité

Théorème 6.1. Une application linéaire f est injective si et seulement si

$$\ker(f) = \{0\}.$$

Démonstration. Supposons $f(x) = f(y)$.

Alors

$$f(x - y) = 0.$$

Ainsi,

$$x - y \in \ker(f).$$

Si le noyau est réduit à $\{0\}$, alors $x = y$. □

Définition 6.2. f est surjective si

$$\text{Im}(f) = F.$$

7 Rang

Définition 7.1. Le rang de f est

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

8 Théorème du rang

Théorème 8.1. Si E est de dimension finie,

$$\dim(E) = \dim(\ker f) + \text{rg}(f).$$

8.1 Exemple

Considérons

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x + y, y + z).$$

Cherchons le noyau.

$$x + y = 0, \quad y + z = 0.$$

Donc

$$x = -y, \quad z = -y.$$

Ainsi,

$$\ker(f) = \{(-t, t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Le noyau est de dimension 1.

Par le théorème du rang,

$$\text{rg}(f) = 3 - 1 = 2.$$

9 Matrices d'applications linéaires

Soient :

- $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E ;
- $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$ une base de F .

Définition 9.1. La matrice de $u : E \rightarrow F$ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} est la matrice obtenue en écrivant les coordonnées des vecteurs

$$u(e_j)$$

dans la base \mathcal{C} .

On note cette matrice :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u).$$

Théorème 9.2. Si

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u),$$

alors

$$[u(x)]_{\mathcal{C}} = A[x]_{\mathcal{B}}.$$

10 Composition

Proposition 10.1. Si

$$u : E \rightarrow F, \quad v : F \rightarrow G$$

sont linéaires, alors

$$v \circ u$$

est linéaire.

De plus,

$$\text{Mat}(v \circ u) = \text{Mat}(v) \text{Mat}(u).$$

11 Endomorphismes et automorphismes

Définition 11.1. Un **endomorphisme** est une application linéaire

$$u : E \rightarrow E.$$

Définition 11.2. Un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif.

En dimension finie, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- u est bijectif ;
- $\ker(u) = \{0\}$;
- la matrice de u est inversible ;
- son déterminant est non nul.

12 Changement de base

Si A et A' représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes et si P est la matrice de passage, alors

$$A' = P^{-1}AP.$$

Deux matrices reliées ainsi sont dites **semblables**.

13 Interprétation géométrique

Les applications linéaires :

- conservent l'origine ;
- transforment les droites en droites ;
- conservent les barycentres.

Exemples :

- rotations ;
- symétries ;
- projections ;
- homothéties.

14 Exercices

Exercice 1

Montrer que

$$f(x, y, z) = (x - y, y - z, x - z)$$

est linéaire.

Exercice 2

Déterminer le noyau et l'image de

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z).$$

Exercice 3

Montrer que

$$u(P) = XP' + P$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 4

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur

$$D = \text{Vect}(1, 1)$$

dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .

15 Méthodologie

Pour étudier une application linéaire, il faut systématiquement :

1. identifier l'espace de départ ;
2. identifier l'espace d'arrivée ;
3. vérifier la linéarité ;
4. déterminer le noyau ;
5. déterminer l'image ;
6. calculer le rang ;
7. déterminer la matrice associée.

16 Pièges classiques

— Une application affine n'est pas forcément linéaire.

$$f(x) = ax + b$$

n'est linéaire que si $b = 0$.

— Toute application linéaire vérifie

$$f(0) = 0.$$

— Une famille génératrice n'est pas forcément libre.

17 Conclusion

Les applications linéaires constituent le socle de l'algèbre linéaire. Leur étude mène naturellement à :

- la réduction des endomorphismes ;
- la diagonalisation ;
- les valeurs propres ;
- les espaces euclidiens ;
- les formes bilinéaires.