

Cours d'Algèbre : Les Polynômes

Niveau Mathématiques Supérieures

Table des matières

1	Définition des polynômes	1
2	Degré d'un polynôme	1
2.1	Propriétés	1
3	Division euclidienne	2
3.1	Théorème	2
3.2	Exemple	2
4	Racines d'un polynôme	2
4.1	Définition	2
4.2	Théorème fondamental	2
4.3	Multiplicité	3
4.4	Conséquence	3
5	Factorisation	3
5.1	Dans $\mathbb{C}[X]$	3
5.2	Dans $\mathbb{R}[X]$	3
6	PGCD de polynômes	3
6.1	Définition	3
6.2	Algorithme d'Euclide	3
7	Théorème de Bézout	4
8	Polynômes irréductibles	4
8.1	Définition	4
8.2	Critère classique	4
9	Dérivée d'un polynôme	4
9.1	Définition	4
9.2	Propriétés	5
9.3	Racines multiples	5
10	Fractions rationnelles	5
10.1	Décomposition en éléments simples	5
11	Interpolation de Lagrange	5
11.1	Théorème	5
11.2	Formule	6

12 Exercices classiques	6
13 Conseils de travail	6
14 Ouvertures	6

1 Définition des polynômes

Soit K un corps (par exemple \mathbb{R} ou \mathbb{C}).

On appelle **polynôme à coefficients dans K** toute expression de la forme :

$$P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$$

où :

$$a_0, a_1, \dots, a_n \in K$$

et seul un nombre fini de coefficients sont non nuls.

L'ensemble des polynômes à coefficients dans K est noté :

$$K[X]$$

Exemple

$$P(X) = 2X^3 - 5X + 1$$

2 Degré d'un polynôme

Si :

$$P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$$

avec $a_n \neq 0$, alors :

$$\deg(P) = n$$

Le coefficient a_n est appelé **coefficient dominant**.

Cas particulier

Le polynôme nul n'a pas de degré (ou un degré $-\infty$ selon les conventions).

2.1 Propriétés

Soient $P, Q \in K[X]$.

Somme

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$

Produit

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

Cette propriété implique que $K[X]$ est un anneau intègre.

3 Division euclidienne

3.1 Théorème

Pour tous $A, B \in K[X]$ avec $B \neq 0$, il existe un unique couple (Q, R) tel que :

$$A = BQ + R$$

avec :

$$\deg(R) < \deg(B)$$

- Q est le quotient ;
- R est le reste.

3.2 Exemple

Divisons :

$$X^3 - 1$$

par :

$$X - 1$$

On obtient :

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$$

Le reste est nul.

4 Racines d'un polynôme

4.1 Définition

Soit $\alpha \in K$.

On dit que α est une racine de P si :

$$P(\alpha) = 0$$

4.2 Théorème fondamental

$$P(\alpha) = 0 \iff (X - \alpha) \mid P$$

4.3 Multiplicité

On dit que α est racine de multiplicité m si :

$$P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$$

avec :

$$Q(\alpha) \neq 0$$

4.4 Conséquence

Un polynôme non nul de degré n possède au plus n racines distinctes.

5 Factorisation

5.1 Dans $\mathbb{C}[X]$

Le théorème fondamental de l'algèbre affirme :

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine complexe.

Ainsi :

$$P(X) = a \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$$

5.2 Dans $\mathbb{R}[X]$

Les polynômes irréductibles sont :

- les polynômes de degré 1 ;
- certains polynômes de degré 2 sans racine réelle.

Exemple

$$X^2 + 1$$

est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

6 PGCD de polynômes

6.1 Définition

Le PGCD de deux polynômes P et Q est le polynôme unitaire D tel que :

- $D \mid P$;
- $D \mid Q$;
- tout diviseur commun de P et Q divise D .

6.2 Algorithme d'Euclide

On applique successivement les divisions euclidiennes.

Exemple

$$P = X^3 - 1, \quad Q = X^2 - 1$$

Alors :

$$\gcd(P, Q) = X - 1$$

7 Théorème de Bézout

Il existe des polynômes $U, V \in K[X]$ tels que :

$$UP + VQ = \gcd(P, Q)$$

En particulier :

$$P \wedge Q = 1 \iff \exists U, V \in K[X], UP + VQ = 1$$

8 Polynômes irréductibles

8.1 Définition

Un polynôme P est dit irréductible si :

- $P \neq 0$;
- $\deg(P) \geq 1$;
- ses seuls diviseurs sont les constantes et les associés de P .

8.2 Critère classique

Pour un polynôme réel de degré 2 ou 3 :

$$P \text{ irréductible} \iff P \text{ n'a pas de racine réelle}$$

Exemple

$$X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$$

dans $\mathbb{C}[X]$.

9 Dérivée d'un polynôme

9.1 Définition

Si :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

alors :

$$P'(X) = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$$

9.2 Propriétés

Linéarité

$$(P + Q)' = P' + Q'$$

Produit

$$(PQ)' = P'Q + PQ'$$

9.3 Racines multiples

$$\alpha \text{ racine multiple de } P \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$$

Ainsi :

$$P \text{ admet une racine multiple} \iff \gcd(P, P') \neq 1$$

10 Fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est une expression :

$$\frac{P(X)}{Q(X)}$$

avec $Q(X) \neq 0$.

L'ensemble des fractions rationnelles forme le corps :

$$K(X)$$

10.1 Décomposition en éléments simples

Exemple :

$$\frac{1}{X^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X - 1} - \frac{1}{X + 1} \right)$$

11 Interpolation de Lagrange

11.1 Théorème

Soient :

$$x_0, \dots, x_n$$

distincts et :

$$y_0, \dots, y_n$$

Alors il existe un unique polynôme P de degré $\leq n$ tel que :

$$P(x_i) = y_i$$

11.2 Formule

$$P(X) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(X)$$

avec :

$$L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

12 Exercices classiques

Exercice 1. Factoriser :

$$X^4 - 1$$

Exercice 2. Déterminer les racines complexes de :

$$X^3 - 8$$

Exercice 3. Calculer :

$$\gcd(X^4 - 1, X^3 - 1)$$

Exercice 4. Décomposer en éléments simples :

$$\frac{2X + 3}{(X - 1)(X + 2)}$$

13 Conseils de travail

Pour maîtriser les polynômes en Math Sup :

- refaire les divisions euclidiennes ;
- travailler les factorisations ;
- connaître les identités remarquables ;
- maîtriser les racines complexes ;
- savoir appliquer Bézout et Euclide ;
- faire beaucoup d'exercices calculatoires.

14 Ouvertures

Les polynômes interviennent dans :

- l'algèbre linéaire ;
- les équations différentielles ;
- l'analyse ;
- la théorie des corps ;
- la géométrie algébrique ;
- la cryptographie.

L'anneau :

$$K[X]$$

est un exemple fondamental :

- d'anneau euclidien ;
- d'anneau principal ;
- d'anneau factoriel.