

# Cours d'Algèbre Les Déterminants

Niveau Mathématiques Supérieures

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Déterminants en dimension 2 et 3</b>	<b>2</b>
2.1	Cas $2 \times 2$ . . . . .	2
2.2	Cas $3 \times 3$ . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Définition générale</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Formule de Leibniz</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Propriétés fondamentales</b>	<b>3</b>
5.1	Effet des opérations élémentaires . . . . .	3
5.2	Matrices triangulaires . . . . .	4
5.3	Produit matriciel . . . . .	4
5.4	Transposition . . . . .	4
<b>6</b>	<b>Inversibilité</b>	<b>4</b>
<b>7</b>	<b>Développement par cofacteurs</b>	<b>4</b>
7.1	Mineurs . . . . .	4
7.2	Cofacteurs . . . . .	4
7.3	Formule de Laplace . . . . .	4
<b>8</b>	<b>Comatrice et inverse</b>	<b>5</b>
<b>9</b>	<b>Déterminants particuliers</b>	<b>5</b>
9.1	Matrices diagonales . . . . .	5
9.2	Matrices de permutation . . . . .	5
9.3	Déterminant de Vandermonde . . . . .	5
<b>10</b>	<b>Applications aux systèmes linéaires</b>	<b>5</b>
10.1	Règle de Cramer . . . . .	5
<b>11</b>	<b>Valeurs propres</b>	<b>6</b>
<b>12</b>	<b>Interprétation géométrique</b>	<b>6</b>
<b>13</b>	<b>Méthodes pratiques de calcul</b>	<b>6</b>
<b>14</b>	<b>Pièges classiques</b>	<b>6</b>

<b>15 Exemples</b>	<b>7</b>
15.1 Exemple 1 . . . . .	7
15.2 Exemple 2 . . . . .	7
<b>16 À maîtriser absolument</b>	<b>7</b>
<b>17 Exercices conseillés</b>	<b>7</b>
<b>18 Résumé</b>	<b>8</b>

# 1 Introduction

Le déterminant est une application qui associe un scalaire à une matrice carrée.

Il intervient dans :

- la résolution des systèmes linéaires ;
- l'étude de l'inversibilité ;
- la géométrie (aires et volumes) ;
- les valeurs propres ;
- le calcul différentiel.

Pour une matrice carrée  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , on note :

$$\det(A)$$

ou parfois :

$$|A|.$$

## 2 Déterminants en dimension 2 et 3

### 2.1 Cas $2 \times 2$

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det(A) = ad - bc$$

#### Interprétation géométrique

La valeur absolue du déterminant représente l'aire orientée du parallélogramme engendré par les colonnes.

- $\det(A) > 0$  : orientation conservée ;
- $\det(A) < 0$  : orientation inversée ;
- $\det(A) = 0$  : les vecteurs sont liés.

### 2.2 Cas $3 \times 3$

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

On peut également utiliser la règle de Sarrus.

## Interprétation géométrique

$$|\det(A)|$$

représente le volume du parallélépipède engendré par les colonnes.

## 3 Définition générale

Le déterminant est l'unique application

$$\det : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

vérifiant :

1. la multilinéarité par rapport aux colonnes ;
2. l'alternance ;
3. la normalisation :

$$\det(I_n) = 1.$$

## 4 Formule de Leibniz

Pour  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ ,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$$

où :

- $\mathfrak{S}_n$  est le groupe symétrique ;
- $\varepsilon(\sigma)$  est la signature de la permutation.

## 5 Propriétés fondamentales

### 5.1 Effet des opérations élémentaires

#### Échange de deux lignes

$$L_i \leftrightarrow L_j \quad \Rightarrow \quad \det \mapsto -\det$$

#### Multiplication d'une ligne par $\lambda$

$$L_i \leftarrow \lambda L_i \quad \Rightarrow \quad \det \mapsto \lambda \det$$

#### Ajout d'un multiple d'une ligne à une autre

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$$

Le déterminant ne change pas.

## 5.2 Matrices triangulaires

Si  $A$  est triangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

alors :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

## 5.3 Produit matriciel

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

Conséquences :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

et

$$\det(A^k) = \det(A)^k.$$

## 5.4 Transposition

$$\det(A^T) = \det(A)$$

## 6 Inversibilité

Théorème fondamental :

$$A \text{ inversible} \iff \det(A) \neq 0$$

## 7 Développement par cofacteurs

### 7.1 Mineurs

Le mineur  $M_{ij}$  est obtenu en supprimant la ligne  $i$  et la colonne  $j$ .

### 7.2 Cofacteurs

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

### 7.3 Formule de Laplace

Développement suivant la ligne  $i$  :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}$$

## 8 Comatrice et inverse

La comatrice de  $A$  est :

$$\text{Com}(A) = (C_{ij})^T$$

Si  $\det(A) \neq 0$  :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Com}(A)$$

## 9 Déterminants particuliers

### 9.1 Matrices diagonales

$$\det(D) = \prod d_i$$

### 9.2 Matrices de permutation

Le déterminant vaut :

$$\pm 1$$

selon la parité de la permutation.

### 9.3 Déterminant de Vandermonde

Soit

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

## 10 Applications aux systèmes linéaires

### 10.1 Règle de Cramer

Pour :

$$AX = B$$

si  $\det(A) \neq 0$  :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

où  $A_i$  est obtenue en remplaçant la colonne  $i$  par  $B$ .

## 11 Valeurs propres

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

De plus :

- le produit des valeurs propres vaut  $\det(A)$  ;
- la somme des valeurs propres vaut  $\text{Tr}(A)$ .

## 12 Interprétation géométrique

Une application linéaire :

$$u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

multiplie les volumes orientés par :

$$\det(u)$$

- $|\det(u)| > 1$  : dilatation ;
- $0 < |\det(u)| < 1$  : contraction ;
- $\det(u) = 0$  : écrasement dimensionnel.

## 13 Méthodes pratiques de calcul

En pratique :

1. utiliser les opérations élémentaires ;
2. triangulariser la matrice ;
3. multiplier les pivots ;
4. corriger selon les échanges de lignes.

## 14 Pièges classiques

- oublier le changement de signe ;
- croire que :

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$$

ce qui est faux en général ;

- développer inutilement par Laplace sur de grandes matrices ;
- oublier que le déterminant n'existe que pour les matrices carrées.

## 15 Exemples

### 15.1 Exemple 1

Calculer :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice est triangulaire :

$$\det = 1 \times 1 \times 5 = 5$$

### 15.2 Exemple 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det(A) = 4 - 4 = 0$$

Les colonnes sont liées, donc  $A$  n'est pas inversible.

## 16 À maîtriser absolument

Vous devez savoir :

- calculer rapidement un déterminant ;
- utiliser les opérations élémentaires ;
- reconnaître une matrice inversible ;
- effectuer un développement de Laplace ;
- utiliser la règle de Cramer ;
- relier déterminant, rang et valeurs propres.

## 17 Exercices conseillés

### Niveau 1

1. Calculer des déterminants  $2 \times 2$  et  $3 \times 3$ .
2. Déterminer si une matrice est inversible.

### Niveau 2

1. Calculer un déterminant par pivot de Gauss.
2. Étudier un déterminant dépendant d'un paramètre.

### Niveau 3

1. Déterminant de Vandermonde.
2. Déterminants blocs.
3. Déterminants et diagonalisation.

## 18 Résumé

Les idées essentielles sont :

- le déterminant mesure une variation de volume ;
- $\det(A) \neq 0$  équivaut à l'inversibilité ;
- les opérations élémentaires permettent des calculs rapides ;
- le déterminant est multiplicatif ;
- les valeurs propres sont liées au polynôme caractéristique.