

Cours d'Algèbre

Les Espaces Vectoriels

Niveau Math Sup

Table des matières

1	Introduction	2
2	Définition d'un espace vectoriel	2
2.1	Axiomes additifs	2
2.2	Compatibilité avec les scalaires	2
3	Exemples fondamentaux	3
3.1	\mathbb{R}^n	3
3.2	Polynômes	3
3.3	Matrices	3
3.4	Fonctions	3
4	Sous-espaces vectoriels	3
4.1	Définition	3
4.2	Critère pratique	3
4.3	Exemple	3
5	Combinaisons linéaires	4
5.1	Sous-espace engendré	4
6	Familles libres	4
6.1	Définition	4
6.2	Exemple	4
7	Familles génératrices	4
8	Bases	4
8.1	Définition	4
8.2	Théorème fondamental	5
9	Dimension	5
9.1	Définition	5
9.2	Exemples	5
10	Théorèmes fondamentaux	5
10.1	Complétion d'une famille libre	5
10.2	Extraction d'une base	5
10.3	Théorème de dimension	5

11 Sommes de sous-espaces	5
11.1 Somme	5
11.2 Somme directe	6
12 Rang	6
13 Méthodes classiques	6
13.1 Tester la liberté	6
13.2 Tester le caractère générateur	6
13.3 Montrer qu'un ensemble est un sous-espace	6
14 Exemples	6
14.1 Exemple 1	6
14.2 Exemple 2	6
15 Pièges classiques	7
16 Exercices	7
17 Conclusion	7

1 Introduction

L'algèbre linéaire étudie des objets que l'on peut :

- additionner ;
- multiplier par un scalaire.

Les espaces vectoriels apparaissent dans de nombreux contextes :

- géométrie ;
- suites ;
- polynômes ;
- matrices ;
- fonctions.

2 Définition d'un espace vectoriel

Soit \mathbb{K} un corps (en pratique \mathbb{R} ou \mathbb{C}).

Un **espace vectoriel** sur \mathbb{K} est un ensemble E muni :

- d'une addition ;
- d'une multiplication externe par les scalaires.

Ces opérations vérifient les axiomes suivants.

2.1 Axiomes additifs

Pour tous $u, v, w \in E$:

$$\begin{aligned}u + v &= v + u \\(u + v) + w &= u + (v + w)\end{aligned}$$

Il existe un vecteur nul 0_E tel que :

$$u + 0_E = u$$

Tout vecteur possède un opposé :

$$u + (-u) = 0_E$$

2.2 Compatibilité avec les scalaires

Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}\lambda(u + v) &= \lambda u + \lambda v \\(\lambda + \mu)u &= \lambda u + \mu u \\(\lambda\mu)u &= \lambda(\mu u) \\1u &= u\end{aligned}$$

3 Exemples fondamentaux

3.1 \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n)\}$$

Les opérations sont définies coordonnée par coordonnée.

3.2 Polynômes

L'ensemble :

$$\mathbb{R}[X]$$

des polynômes à coefficients réels est un espace vectoriel.

3.3 Matrices

L'ensemble :

$$M_{n,p}(\mathbb{R})$$

des matrices réelles de taille $n \times p$ est un espace vectoriel.

3.4 Fonctions

L'ensemble :

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

des fonctions réelles est un espace vectoriel.

4 Sous-espaces vectoriels

4.1 Définition

Une partie $F \subset E$ est un **sous-espace vectoriel** si :

- $0_E \in F$;
- $u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$;
- $\lambda \in \mathbb{K}, u \in F \Rightarrow \lambda u \in F$.

4.2 Critère pratique

Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel, il suffit de vérifier :

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda u + \mu v \in F$$

4.3 Exemple

Dans \mathbb{R}^2 :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$$

est un sous-espace vectoriel.

5 Combinaisons linéaires

Soit une famille :

$$(v_1, \dots, v_p)$$

Toute expression :

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$$

est une **combinaison linéaire**.

5.1 Sous-espace engendré

L'ensemble des combinaisons linéaires est noté :

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$$

6 Familles libres

6.1 Définition

La famille (v_1, \dots, v_p) est **libre** si :

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$$

Sinon, elle est dite **liée**.

6.2 Exemple

Dans \mathbb{R}^2 :

$$(1, 0), (0, 1)$$

est une famille libre.

En revanche :

$$(1, 2), (2, 4)$$

est une famille liée.

7 Familles génératrices

Une famille (v_1, \dots, v_p) est **génératrice** de E si :

$$E = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$$

8 Bases

8.1 Définition

Une **base** est une famille :

- libre ;
- génératrice.

8.2 Théorème fondamental

Si :

$$B = (e_1, \dots, e_n)$$

est une base de E , alors tout vecteur $u \in E$ s'écrit de manière unique :

$$u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Les scalaires x_i sont les coordonnées de u dans la base B .

9 Dimension

9.1 Définition

La dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteurs d'une base.

Notation :

$$\dim(E)$$

9.2 Exemples

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

$$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$$

10 Théorèmes fondamentaux

10.1 Complétion d'une famille libre

Toute famille libre peut être complétée en une base.

10.2 Extraction d'une base

Toute famille génératrice contient une base.

10.3 Théorème de dimension

Dans un espace vectoriel de dimension finie n :

- toute famille libre contient au plus n vecteurs ;
- toute famille génératrice contient au moins n vecteurs.

11 Sommes de sous-espaces

11.1 Somme

$$F + G = \{u + v \mid u \in F, v \in G\}$$

11.2 Somme directe

On dit que :

$$E = F \oplus G$$

si tout vecteur de E s'écrit de manière unique :

$$x = u + v$$

avec $u \in F$ et $v \in G$.

Critère :

$$F \oplus G \iff F \cap G = \{0\}$$

12 Rang

Le rang d'une famille (v_1, \dots, v_p) est :

$$\text{rg}(v_1, \dots, v_p) = \dim(\text{Vect}(v_1, \dots, v_p))$$

13 Méthodes classiques

13.1 Tester la liberté

On résout :

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0$$

13.2 Tester le caractère générateur

On prend un vecteur quelconque et on cherche à l'écrire comme combinaison linéaire.

13.3 Montrer qu'un ensemble est un sous-espace

On vérifie la stabilité par combinaison linéaire.

14 Exemples

14.1 Exemple 1

Dans \mathbb{R}^3 :

$$u = (1, 0, 1), \quad v = (0, 1, 1), \quad w = (1, 1, 2)$$

On remarque :

$$w = u + v$$

Donc la famille est liée.

14.2 Exemple 2

Montrer que :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel.

15 Pièges classiques

- Une famille libre n'est pas nécessairement génératrice.
- Une famille génératrice n'est pas nécessairement libre.
- Toute famille contenant le vecteur nul est liée.
- Un espace affine n'est pas forcément un espace vectoriel.

16 Exercices

Exercice 1

Montrer que :

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel.

Exercice 2

Étudier la liberté de :

$$(1, 0, 1), \quad (1, 1, 0), \quad (2, 1, 1)$$

Exercice 3

Trouver une base de :

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z + t\}$$

Exercice 4

Déterminer la dimension de :

$$\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(1) = 0\}$$

17 Conclusion

Les espaces vectoriels constituent le fondement de toute l'algèbre linéaire.

Ils conduisent naturellement à :

- l'étude des applications linéaires ;
- les matrices ;
- les déterminants ;
- la diagonalisation ;
- les espaces euclidiens.