# Cours d'Algèbre : Les Matrices

Niveau Mathématiques Supérieures

## Table des matières

# 1 Introduction

Les matrices constituent un outil fondamental de l'algèbre linéaire. Elles permettent de représenter :

— les systèmes linéaires ;

— les applications linéaires ;

— les transformations géométriques ;

— de nombreux phénomènes physiques et numériques.

Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres.
Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de taille $2 \times 3$.

# 2 Définitions fondamentales

## 2.1 Notation

Une matrice $A = (a_{ij})$ de taille $m \times n$ possède :

— $m$ lignes ;

— $n$ colonnes ;

— un coefficient $a_{ij}$ à la ligne $i$, colonne $j$.

On note :

$$M_{m,n}(\mathbb{K})$$

l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Si $m = n$, la matrice est dite **carrée**.

## 2.2 Matrices particulières

### 2.2.1 Matrice nulle

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 2.2.2 Matrice identité

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Elle vérifie :

$$AI_n = I_nA = A$$

#### 2.2.3 Matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

#### 2.2.4 Matrice triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

## 3 Opérations sur les matrices

### 3.1 Addition

Deux matrices de même taille peuvent être additionnées :

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

### 3.2 Multiplication par un scalaire

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$$

### 3.3 Produit matriciel

Si $A \in M_{m,n}$ et $B \in M_{n,p}$, alors :

$$AB \in M_{m,p}$$

et :

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$AB = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

### 3.4 Propriétés

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$
$$(AB)C = A(BC)$$
$$A(B+C) = AB+AC$$

Le produit matriciel n'est généralement pas commutatif :

$$AB \neq BA$$

## 4 Transposée

La transposée d'une matrice $A$, notée $A^T$, s'obtient en échangeant lignes et colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$

## 5 Déterminant

Pour une matrice $2 \times 2$ :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Exemple :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2$$

### 5.1 Critère d'inversibilité

Une matrice carrée $A$ est inversible si et seulement si :

$$\det(A) \neq 0$$

## 6 Matrice inverse

Une matrice $A$ est inversible s'il existe une matrice $A^{-1}$ telle que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Pour une matrice $2 \times 2$ :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

si $ad - bc \neq 0$.

# 7 Systèmes linéaires

Le système :

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$$

s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Si $A$ est inversible :

$$X = A^{-1}B$$

# 8 Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice mesure le nombre maximal de lignes ou colonnes linéairement indépendantes.

Notation :

$$\mathrm{rg}(A)$$

Propriétés :

- $\mathrm{rg}(A) \leq \min(m, n)$
- $A$ inversible $\iff \mathrm{rg}(A) = n$

# 9 Pivot de Gauss

Les opérations élémentaires sont :

1. échanger deux lignes ;
2. multiplier une ligne par un scalaire non nul ;
3. ajouter à une ligne un multiple d'une autre.

## 9.1 Exemple

Résoudre :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

Matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

On effectue :

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

On obtient :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Donc :

$$y = 1, \qquad x = 1$$

# 10 Valeurs propres

Une valeur propre $\lambda$ d'une matrice $A$ vérifie :

$$AX = \lambda X$$

avec $X \neq 0$.
Cela équivaut à :

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

# 11 Diagonalisation

Une matrice est diagonalisable s'il existe :

- une matrice inversible $P$ ;
- une matrice diagonale $D$ ;

telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

On peut alors calculer facilement :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

# 12 Interprétation géométrique

Une matrice peut représenter :

- une rotation ;
- une symétrie ;
- une projection ;
- une homothétie ;
- un cisaillement.

Exemple : rotation d'angle $\theta$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

# 13 Théorèmes fondamentaux

## 13.1 Théorème du rang

$$\dim(\ker A) + \mathrm{rg}(A) = n$$

### 13.2 Théorème de Cayley-Hamilton

Toute matrice annule son polynôme caractéristique.

## 14 Méthodologie

Pour réussir ce chapitre, il faut maîtriser :

- le calcul matriciel ;
- les déterminants ;
- le pivot de Gauss ;
- les inverses ;
- les valeurs propres ;
- la diagonalisation.

## 15 Exercices classiques

1. Calculer un produit matriciel.
2. Déterminer un déterminant.
3. Calculer une matrice inverse.
4. Résoudre un système linéaire.
5. Déterminer le rang d'une matrice.
6. Calculer les valeurs propres.
7. Diagonaliser une matrice.

## 16 Conclusion

Les matrices constituent un langage central de l'algèbre linéaire moderne. Leur maîtrise est indispensable en mathématiques, en physique et en informatique.

Les prolongements naturels de ce chapitre sont :

- les espaces vectoriels ;
- les applications linéaires ;
- les endomorphismes ;
- la réduction des endomorphismes ;
- les formes quadratiques.