Cours d'Algèbre

Réduction des endomorphismes

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Valeurs propres et vecteurs propres **2**

3 Diagonalisation **2**

4 Multiplicités **3**

5 Exemple de diagonalisation **3**

5.1 Calcul du polynôme caractéristique 3

5.2 Espaces propres 3

5.3 Matrices de passage et diagonale 4

6 Intérêt de la diagonalisation **4**

7 Polynôme minimal **4**

8 Endomorphismes nilpotents **5**

9 Réduction de Jordan **5**

10 Sous-espaces stables **5**

11 Projecteurs et symétries **5**

11.1 Projecteurs 5

11.2 Symétries 5

12 Théorème de Cayley-Hamilton **6**

13 Méthode pratique de diagonalisation **6**

14 Erreurs classiques **6**

15 Exercices **6**

16 Conclusion **7**

1 Introduction

La réduction d'un endomorphisme consiste à choisir une base adaptée dans laquelle la matrice associée devient aussi simple que possible.

L'objectif est de :

- comprendre la structure d'un endomorphisme ;
- simplifier les calculs de puissances de matrices ;
- résoudre des systèmes différentiels ou des suites récurrentes ;
- décomposer l'espace vectoriel en sous-espaces simples.

Dans tout le cours :

- E désigne un espace vectoriel de dimension finie ;
- $u \in \mathcal{L}(E)$;
- A désigne la matrice de u dans une base donnée.

2 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 2.1. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que

$$u(x) = \lambda x.$$

Le vecteur x est appelé vecteur propre associé à λ.

Définition 2.2. L'espace propre associé à λ est

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda \operatorname{Id}).$$

Proposition 2.3.

$$\lambda \text{ est valeur propre } \iff \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Définition 2.4. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_n).$$

Ses racines sont les valeurs propres de A.

3 Diagonalisation

Définition 3.1. Un endomorphisme u est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Dans cette base :

$$A = PDP^{-1}$$

où :

- D est diagonale ;
- P est inversible.

4 Multiplicités

Définition 4.1. La multiplicité algébrique d'une valeur propre λ est son ordre de multiplicité comme racine de χ_A.

Définition 4.2. La multiplicité géométrique de λ est

$$\dim(E_\lambda).$$

Théorème 4.3. Pour toute valeur propre λ,

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_a(\lambda).$$

Théorème 4.4 (Critère de diagonalisabilité)**.** Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si :

1. le polynôme caractéristique est scindé ;
2. pour toute valeur propre λ,
$$m_g(\lambda) = m_a(\lambda).$$

Corollaire 4.5. Si une matrice possède n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.

5 Exemple de diagonalisation

Considérons :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.1 Calcul du polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} 4-X & 1 \\ 0 & 2-X \end{pmatrix} = (4-X)(2-X).$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = 4, \qquad \lambda_2 = 2.$$

Comme elles sont distinctes, la matrice est diagonalisable.

5.2 Espaces propres

Pour $\lambda = 4$:

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On obtient :

$$y = 0.$$

Un vecteur propre est :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = 2$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient :

$$2x + y = 0.$$

Un vecteur propre est :

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

5.3 Matrices de passage et diagonale

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$A = PDP^{-1}.$$

6 Intérêt de la diagonalisation

Si

$$A = PDP^{-1},$$

alors :

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Or :

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix}.$$

Le calcul des puissances devient alors très simple.

7 Polynôme minimal

Définition 7.1. Le polynôme minimal de A, noté μ_A, est le plus petit polynôme unitaire tel que

$$\mu_A(A) = 0.$$

Proposition 7.2. Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.

Théorème 7.3. Une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Exemple 7.4.

$$\mu_A(X) = (X - 1)(X + 2)$$

implique que A est diagonalisable.

En revanche,

$$\mu_A(X) = (X - 1)^2$$

implique que A n'est pas diagonalisable.

8 Endomorphismes nilpotents

Définition 8.1. Un endomorphisme u est nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$u^p = 0.$$

Exemple 8.2.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifie

$$N^2 = 0.$$

9 Réduction de Jordan

Lorsque la matrice n'est pas diagonalisable, on cherche une forme plus simple appelée forme de Jordan.

Définition 9.1. Un bloc de Jordan associé à la valeur propre λ est une matrice :

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Théorème 9.2 (Jordan)**.** Sur $\mathbb{C}$, toute matrice est semblable à une matrice de Jordan.

10 Sous-espaces stables

Définition 10.1. Un sous-espace $F \subset E$ est stable par u si

$$u(F) \subset F.$$

Les espaces propres sont des sous-espaces stables.

11 Projecteurs et symétries

11.1 Projecteurs

Définition 11.1. Un projecteur est un endomorphisme vérifiant

$$p^2 = p.$$

Proposition 11.2. Les seules valeurs propres d'un projecteur sont 0 et 1.

Théorème 11.3. Tout projecteur est diagonalisable.

11.2 Symétries

Définition 11.4. Une symétrie est un endomorphisme vérifiant

$$s^2 = \operatorname{Id}.$$

Proposition 11.5. Les seules valeurs propres possibles sont ± 1.

12 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 12.1 (Cayley-Hamilton)**.** Toute matrice annule son polynôme caractéristique :

$$\chi_A(A) = 0.$$

Ce théorème permet :
- de calculer des puissances de matrices ;
- d'obtenir des relations polynomiales ;
- de déterminer le polynôme minimal.

13 Méthode pratique de diagonalisation

Pour diagonaliser une matrice :
1. Calculer le polynôme caractéristique ;
2. Déterminer les valeurs propres ;
3. Calculer les espaces propres ;
4. Vérifier que la somme des dimensions vaut n ;
5. Construire une base de vecteurs propres ;
6. Former la matrice de passage P.

14 Erreurs classiques

- Une matrice peut avoir une seule valeur propre sans être diagonalisable :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Une matrice réelle peut être diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.
- Il ne faut pas confondre multiplicité algébrique et multiplicité géométrique.

15 Exercices

1. Diagonaliser :
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$
2. Étudier la diagonalisabilité de :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
3. Calculer A^n pour
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
4. Déterminer tous les projecteurs diagonalisables.
5. Réduire une matrice nilpotente.

16 Conclusion

La réduction des endomorphismes est un outil central de l'algèbre linéaire.

La diagonalisation constitue le cas idéal : l'endomorphisme agit indépendamment sur chaque direction propre.

La réduction de Jordan permet de comprendre les matrices non diagonalisables et mesure précisément l'écart à la diagonalisation.

Ces notions jouent un rôle fondamental en :

- algèbre ;
- analyse ;
- probabilités ;
- physique mathématique ;
- théorie des systèmes dynamiques.