Exercices corrigés d'algèbre
Applications linéaires

Niveau Mathématiques Supérieures

Table des matières

1 Vérification de la linéarité

Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

définie par

$$f(x, y) = (2x - y,\ 3x + 4y).$$

Montrer que f est une application linéaire.

Correction

Soient

$$u = (x, y), \qquad v = (x', y').$$

Alors

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(x + x', y + y') \\ &= (2(x + x') - (y + y'),\ 3(x + x') + 4(y + y')). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f(u + v) &= (2x - y, 3x + 4y) + (2x' - y', 3x' + 4y') \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda x, \lambda y) = (2\lambda x - \lambda y,\ 3\lambda x + 4\lambda y)$$

$$= \lambda(2x - y,\ 3x + 4y) = \lambda f(x, y).$$

Ainsi, f est linéaire.
Sa matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2 Noyau et image

Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z,\ x - y + z).$$

Déterminer le noyau et l'image de f.

Correction

On cherche les solutions de

$$f(x, y, z) = (0, 0).$$

Cela donne :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations :

$$2y = 0,$$

donc

$$y = 0.$$

Puis

$$x + z = 0,$$

soit

$$z = -x.$$

Ainsi,

$$\ker(f) = \{(x, 0, -x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Donc

$$\ker(f) = \mathrm{Vect}((1, 0, -1)).$$

Pour l'image :

$$f(x, y, z) = (x + y + z,\ x - y + z).$$

Posons

$$u = x + z.$$

Alors

$$f(x, y, z) = (u + y, u - y).$$

On peut obtenir n'importe quel élément de $\mathbb{R}^2$.
Donc

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2.$$

Le rang de f vaut donc

$$\mathrm{rg}(f) = 2.$$

3 Matrice d'une application linéaire

Soit
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
définie par
$$f(x, y) = (x + 2y,\ 3x - y,\ 4y).$$

Déterminer la matrice de f.

Correction

On considère la base canonique :
$$e_1 = (1, 0), \qquad e_2 = (0, 1).$$

Alors :
$$f(e_1) = (1, 3, 0),$$
et
$$f(e_2) = (2, -1, 4).$$

La matrice de f est donc :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

4 Injectivité et surjectivité

On considère l'application linéaire
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
de matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si f est injective et/ou surjective.

Correction

Calculons le déterminant :
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Développement :
$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Donc :
$$= (1 - 3) - 2(0 - 1) = -2 + 2 = 0.$$

La matrice n'est pas inversible.
Ainsi :

- f n'est pas injective ;
- f n'est pas surjective.

5 Composition d'applications linéaires

Soient

$$f(x, y) = (x + y,\ y)$$

et

$$g(x, y) = (2x,\ x - y).$$

Calculer $g \circ f$.

Correction

On applique d'abord f :

$$f(x, y) = (x + y, y).$$

Puis :

$$g(f(x, y)) = g(x + y, y).$$

Ainsi :

$$g(f(x, y)) = (2(x + y),\ (x + y) - y).$$

Donc :

$$(g \circ f)(x, y) = (2x + 2y,\ x).$$

6 Exercice sur le rang

Soit

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

définie par

$$f(x, y, z, t) = (x + y,\ y + z,\ z + t).$$

Déterminer le rang de f.

Correction

La matrice associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les trois lignes sont linéairement indépendantes.
Donc :

$$\mathrm{rg}(f) = 3.$$

L'application est surjective.
Par le théorème du rang :

$$\dim(\ker f) = 4 - 3 = 1.$$

7 Exercice niveau concours

Soit

$$E = \mathbb{R}_n[X]$$

et l'application

$$\varphi : E \to E$$

définie par

$$\varphi(P) = P + P'.$$

1) Montrer que φ est linéaire.
2) Déterminer son noyau.
3) Montrer que φ est un automorphisme.

Correction

1) Linéarité

Pour tous polynômes P, Q et tous scalaires λ, μ,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q) &= \lambda P + \mu Q + \lambda P' + \mu Q' \\ &= \lambda(P + P') + \mu(Q + Q').\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire.

2) Noyau

Cherchons les polynômes tels que

$$\varphi(P) = 0.$$

On obtient :

$$P + P' = 0.$$

Les solutions de cette équation différentielle sont :

$$P(x) = Ce^{-x}.$$

Or un tel objet n'est polynomial que si

$$C = 0.$$

Ainsi :

$$\ker(\varphi) = \{0\}.$$

3) Automorphisme

L'espace E est de dimension finie.
Comme le noyau est réduit à $\{0\}$, φ est injective.
En dimension finie, injective implique surjective.
Donc φ est un automorphisme.

8 Rappels de cours

Théorème du rang

Pour toute application linéaire

$$f : E \to F,$$

on a :

$$\dim(E) = \dim(\ker f) + \mathrm{rg}(f).$$

Critère d'inversibilité

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si

$$\det(A) \neq 0.$$