Exercices Corrigés — Déterminants
Niveau Mathématiques Supérieures

Table des matières

1 Calcul direct d'un déterminant

Exercice 1

Calculer :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Correction

Pour une matrice 2×2 :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Ainsi :

$$\det(A) = 3(-1) - 5 \times 2$$

$$= -3 - 10 = -13$$

2 Déterminant d'ordre 3

Exercice 2

Calculer :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction

Développement selon la première ligne :

$$\det(B) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculons les mineurs :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Donc :

$$\det(B) = -4 + 16 - 6 = 6$$

3 Triangularisation

Exercice 3

Calculer :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Correction

Effectuons :

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice est triangulaire supérieure.
Donc :

$$\det(C) = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

4 Effet des opérations élémentaires

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

avec :

$$\det(D) = -2$$

Exercice 4.a

Déterminer :

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Correction

On a échangé deux lignes.
Le déterminant change de signe :

$$= 2$$

Exercice 4.b

Déterminer :

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Correction

La première ligne a été multipliée par 2.
Donc :

$$\det = -4$$

5 Matrices non inversibles

Exercice 5

Montrer que :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible.

Correction

On remarque :

$$L_2 = 2L_1$$

Les lignes sont liées.
Donc :

$$\det(E) = 0$$

La matrice n'est donc pas inversible.

6 Matrices triangulaires

Exercice 6

Calculer :

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Correction

Pour une matrice triangulaire :

$$\det(F) = \prod \text{ des coefficients diagonaux}$$

Donc :

$$\det(F) = 2 \times 5 \times (-1) \times 7 = -70$$

7 Déterminant de Vandermonde

Exercice 7

Calculer :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Correction

C'est un déterminant de Vandermonde.
On sait que :

$$\det(V) = (b-a)(c-a)(c-b)$$

8 Déterminant avec paramètre

Exercice 8

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible.

Correction

La matrice est inversible si :

$$\det(G) \neq 0$$

Or :

$$\det(G) = 1 - m^2$$

Donc :

$$1 - m^2 \neq 0$$

$$m \neq \pm 1$$

9 Développement selon une ligne

Exercice 9

Calculer :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction

Développement selon la première ligne :

$$\det(H) = 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Après calcul :

$$\det(H) = 15$$

10 Exercice classique de Math Sup

Exercice 10

Montrer que :

$$\det \begin{pmatrix} 1+a & a & a \\ a & 1+a & a \\ a & a & 1+a \end{pmatrix} = 1+3a$$

Correction

Effectuons :

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1+a & a & a \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Développement selon la première ligne :

$$(1+a)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Donc :

$$(1+a) - a + a$$

$$= 1+3a$$

11 Rappels de cours

Propriétés fondamentales

— $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
— $\det(A^T) = \det(A)$
— Si A est inversible :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Effets des opérations élémentaires

— Échange de deux lignes :

$$\det \text{ change de signe}$$

— Multiplication d'une ligne par λ :

$$\det \text{ est multiplié par } \lambda$$

— Ajout d'un multiple d'une ligne à une autre :

$$\det \text{ inchangé}$$