

Exercices corrigés d'algèbre

Espaces vectoriels – Niveau Math Sup

Exercice 1 — Sous-espace vectoriel

Soit

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Correction

On vérifie les trois propriétés.

1) Le vecteur nul appartient à F

$$0 + 2 \times 0 - 0 = 0.$$

Donc

$$(0, 0, 0) \in F.$$

2) Stabilité par addition

Soient

$$u = (x_1, y_1, z_1), \quad v = (x_2, y_2, z_2) \in F.$$

Alors

$$x_1 + 2y_1 - z_1 = 0, \quad x_2 + 2y_2 - z_2 = 0.$$

On calcule :

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + 2y_1 - z_1) + (x_2 + 2y_2 - z_2) = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$u + v \in F.$$

3) Stabilité par multiplication scalaire

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda u = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

Alors

$$\lambda x_1 + 2\lambda y_1 - \lambda z_1 = \lambda(x_1 + 2y_1 - z_1) = 0.$$

Donc

$$\lambda u \in F.$$

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Exercice 2 — Base et dimension

On considère

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

Déterminer une base de F et sa dimension.

Correction

L'équation donne

$$x = -y - z.$$

Donc tout vecteur de F s'écrit

$$(x, y, z) = (-y - z, y, z).$$

On factorise :

$$(-y - z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1).$$

Ainsi,

$$F = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)).$$

Vérifions que ces deux vecteurs sont libres.

Supposons

$$a(-1, 1, 0) + b(-1, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Alors

$$(-a - b, a, b) = (0, 0, 0).$$

D'où

$$a = 0, \quad b = 0.$$

La famille est donc libre.

Ainsi,

$$((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$$

est une base de F .

Par conséquent,

$$\dim(F) = 2.$$

Exercice 3 — Famille libre ou liée

Dans \mathbb{R}^3 , on considère

$$u = (1, 0, 1), \quad v = (2, 1, 3), \quad w = (0, 1, 1).$$

Étudier si la famille (u, v, w) est libre.

Correction

On cherche une relation linéaire :

$$au + bv + cw = 0.$$

Cela donne

$$a(1, 0, 1) + b(2, 1, 3) + c(0, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

Par identification des coordonnées :

$$\begin{cases} a + 2b = 0, \\ b + c = 0, \\ a + 3b + c = 0. \end{cases}$$

De la deuxième équation :

$$c = -b.$$

De la première :

$$a = -2b.$$

Dans la troisième :

$$-2b + 3b - b = 0.$$

Cette relation est toujours vérifiée.

Il existe donc des solutions non nulles.

Par exemple :

$$b = 1, \quad a = -2, \quad c = -1.$$

Ainsi,

$$-2u + v - w = 0.$$

La famille est donc liée.

Exercice 4 — Compléter une famille libre

Dans \mathbb{R}^3 , compléter

$$u = (1, 1, 0), \quad v = (1, 0, 1)$$

en une base de \mathbb{R}^3 .

Correction

Considérons

$$w = (0, 0, 1).$$

Supposons

$$au + bv = w.$$

Alors

$$a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) = (0, 0, 1).$$

Donc

$$(a + b, a, b) = (0, 0, 1).$$

On obtient

$$a = 0, \quad b = 1,$$

mais alors

$$a + b = 1 \neq 0.$$

Contradiction.

Donc

$$w \notin \text{Vect}(u, v).$$

La famille

$$(u, v, w)$$

est libre dans un espace de dimension 3, donc c'est une base.

Une base de \mathbb{R}^3 est donc

$$((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)).$$

Exercice 5 — Somme et intersection

Dans \mathbb{R}^3 , on considère

$$F = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0)),$$

et

$$G = \text{Vect}((1, 1, 0)).$$

Déterminer $F + G$ et $F \cap G$.

Correction

Le sous-espace F est le plan d'équation

$$z = 0.$$

Or

$$(1, 1, 0) \in F.$$

Donc

$$G \subset F.$$

Par conséquent,

$$F + G = F.$$

Et puisque

$$G \subset F,$$

on a

$$F \cap G = G.$$

Exercice 6 — Application linéaire

Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + y, x - y).$$

- 1) Montrer que f est linéaire.
- 2) Déterminer son noyau.
- 3) Déterminer son image.

Correction

1) Linéarité

Pour

$$(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2,$$

on a

$$\begin{aligned} f((x, y) + (x', y')) &= (x + x' + y + y', x + x' - (y + y')) \\ &= f(x, y) + f(x', y'). \end{aligned}$$

De plus,

$$f(\lambda(x, y)) = (\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y) = \lambda f(x, y).$$

Donc f est linéaire.

2) Noyau

On résout

$$f(x, y) = (0, 0).$$

Ainsi,

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

En additionnant :

$$2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Puis

$$y = 0.$$

Donc

$$\ker(f) = \{(0, 0)\}.$$

3) Image

La matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut

$$-1 - 1 = -2 \neq 0.$$

La matrice est donc inversible.

Ainsi,

$$\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2.$$

Exercice 7 — Espace de polynômes

Soit

$$E = \mathbb{R}_2[X]$$

l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

On considère

$$F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}.$$

- 1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel.
- 2) Déterminer sa dimension.
- 3) Donner une base de F .

Correction

Si

$$P(1) = 0,$$

alors

$$X - 1$$

divise P .

Donc il existe

$$Q \in \mathbb{R}_1[X]$$

tel que

$$P(X) = (X - 1)Q(X).$$

Écrivons

$$Q(X) = aX + b.$$

Alors

$$P(X) = (X - 1)(aX + b).$$

On développe :

$$P(X) = aX^2 + (b - a)X - b.$$

Ainsi,

$$F = \text{Vect}(X - 1, X(X - 1)).$$

Les polynômes

$$X - 1 \quad \text{et} \quad X(X - 1)$$

sont libres.

Ils forment donc une base de F .

Ainsi,

$$\dim(F) = 2.$$