Exercices Corrigés d'Algèbre
Matrices – Niveau Math Sup

Table des matières

1 Calcul matriciel de base

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer :

1) $A + B$
2) AB
3) BA
4) A^2

Correction

1) Somme

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 \\ 3-1 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

2) Produit AB

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 2 \times (-1) & 1 \times 1 + 2 \times 2 \\ 3 \times 0 + 4 \times (-1) & 3 \times 1 + 4 \times 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$$

3) Produit BA

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

On remarque que :

$$AB \neq BA$$

Le produit matriciel n'est pas commutatif.

4) Calcul de A^2

$$A^2 = A \times A$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

2 Inversion d'une matrice 2×2

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer A^{-1}.

Correction

Pour une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

si $ad - bc \neq 0$.
Ici :

$$\det(A) = 2 \times 3 - 1 \times 5 = 1$$

Donc A est inversible.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

3 Déterminant d'une matrice 3×3

Calculer :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction

Développement selon la première ligne :

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1) - 2(0 - 8) + 3(0 - 2)$$

$$= 1 + 16 - 6$$

$$= 11$$

4 Résolution d'un système par matrices

Résoudre :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Correction

Écriture matricielle :

$$AX = B$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcule :

$$\det(A) = -1 - 2 = -3 \neq 0$$

Donc :

$$X = A^{-1}B$$

On trouve :

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$x = 1, \qquad y = 2$$

5 Puissances de matrices

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n.

Correction

Calculons les premières puissances :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On conjecture :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La démonstration se fait par récurrence.

6 Diagonalisation

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs propres.
2) La matrice est-elle diagonalisable ?

Correction

Le polynôme caractéristique vaut :

$$(3 - \lambda)(5 - \lambda)$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 5$$

La matrice est déjà diagonale, donc diagonalisable.

7 Exercice classique de réduction

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres et diagonaliser A.

Correction

Polynôme caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 - 1$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda$$

$$= \lambda(\lambda - 2)$$

Valeurs propres :

$$0 \qquad \text{et} \qquad 2$$

Vecteurs propres

Pour $\lambda = 2$:

$$(A - 2I)X = 0$$

donne :

$$x = y$$

Un vecteur propre est :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda = 0$:

$$AX = 0$$

donne :

$$x = -y$$

Un vecteur propre est :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Comme on possède deux vecteurs propres indépendants, la matrice est diagonalisable.

8 Conseils Méthode

Erreurs classiques :

- oublier que $AB \neq BA$;
- confondre produit matriciel et produit terme à terme ;
- oublier de vérifier $\det(A) \neq 0$ avant inversion ;
- erreurs de signe dans les déterminants ;
- mauvais calcul du polynôme caractéristique.

9 Pour aller plus loin

Thèmes importants à travailler :

1. matrices triangulaires ;
2. matrices nilpotentes ;
3. matrices de projection ;
4. matrices symétriques ;
5. suites matricielles ;
6. réduction de Jordan.