Exercices corrigés d'algèbre
Polynômes – Niveau Math sup

Exercice 1 – Division euclidienne et reste

Déterminer le reste de la division de

$$P(X) = X^5 - 3X^3 + 2X + 7$$

par

$$X - 2.$$

Correction

Par le théorème du reste :

$$\text{Le reste de la division de } P(X) \text{ par } X - a \text{ est } P(a).$$

Ici :

$$a = 2.$$

Calculons :

$$P(2) = 2^5 - 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 + 7.$$

Donc :

$$P(2) = 32 - 24 + 4 + 7 = 19.$$

Le reste est donc :

$$\boxed{19}$$

Exercice 2 – Factorisation

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = X^3 - 3X^2 - 4X + 12.$$

Correction

Cherchons une racine évidente.

$$P(2) = 8 - 12 - 8 + 12 = 0.$$

Donc $X - 2$ divise P.
On effectue la division :

$$P(X) = (X - 2)(X^2 - X - 6).$$

Puis :

$$X^2 - X - 6 = (X - 3)(X + 2).$$

Ainsi :

$$\boxed{P(X) = (X - 2)(X - 3)(X + 2)}$$

Exercice 3 – Multiplicité d'une racine

Déterminer la multiplicité de 1 comme racine du polynôme

$$P(X) = X^4 - 2X^3 + 2X - 1.$$

Correction

On calcule :

$$P(1) = 1 - 2 + 2 - 1 = 0.$$

Donc 1 est racine.
Dérivons :

$$P'(X) = 4X^3 - 6X^2 + 2.$$

Alors :

$$P'(1) = 4 - 6 + 2 = 0.$$

Deuxième dérivée :

$$P''(X) = 12X^2 - 12X.$$

Donc :

$$P''(1) = 0.$$

Troisième dérivée :

$$P^{(3)}(X) = 24X - 12.$$

Ainsi :

$$P^{(3)}(1) = 12 \neq 0.$$

Donc 1 est racine de multiplicité 3.

$$\boxed{(X-1)^3 \text{ divise } P(X)}$$

Exercice 4 – Relations coefficients-racines

Soient a, b, c les racines de

$$P(X) = X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Calculer :

$$a + b + c, \qquad ab + ac + bc, \qquad abc.$$

Correction

Par les formules de Viète :

$$P(X) = X^3 - s_1X^2 + s_2X - s_3$$

avec

$$s_1 = a + b + c,$$
$$s_2 = ab + ac + bc,$$
$$s_3 = abc.$$

Par identification :

$$a + b + c = 5,$$
$$ab + ac + bc = 7,$$
$$abc = 3.$$

Donc :

$$\boxed{a + b + c = 5, \quad ab + ac + bc = 7, \quad abc = 3}$$

Exercice 5 – Racines complexes

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^4 + 1.$$

Correction

On résout :

$$X^4 = -1 = e^{i\pi}.$$

Les racines sont :

$$e^{i(\pi+2k\pi)/4}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Ainsi :

$$X^4 + 1 = \prod_{k=0}^{3} \left(X - e^{i(\pi+2k\pi)/4} \right).$$

Dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\boxed{X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)}$$

Exercice 6 – Interpolation

Déterminer le polynôme P de degré au plus 2 tel que

$$P(0) = 1, \qquad P(1) = 2, \qquad P(2) = 5.$$

Correction

Posons :

$$P(X) = aX^2 + bX + c.$$

Les conditions donnent :

$$P(0) = 1 \Rightarrow c = 1,$$

$$P(1) = 2 \Rightarrow a + b + 1 = 2,$$

$$P(2) = 5 \Rightarrow 4a + 2b + 1 = 5.$$

Donc :

$$a + b = 1,$$

$$2a + b = 2.$$

Par soustraction :

$$a = 1.$$

Puis :

$$b = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{P(X) = X^2 + 1}$$

Exercice 7 – PGCD de polynômes

Déterminer

$$\gcd(X^3 - 1, X^2 - 1).$$

Correction

On factorise :

$$X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1),$$
$$X^2 - 1 = (X-1)(X+1).$$

Le facteur commun est :

$$\boxed{X-1}$$

Donc :

$$\boxed{\gcd(X^3-1, X^2-1) = X-1}$$

Exercice 8 – Exercice classique

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(X^2) = P(X)^2.$$

Correction

Cherchons d'abord les solutions constantes.
Si $P(X) = c$, alors :

$$c = c^2.$$

Donc :

$$c \in \{0, 1\}.$$

Supposons maintenant P non constant.
Posons :

$$P(X) = aX^n + \cdots$$

avec $a \neq 0$.
Alors :

$$P(X^2) = aX^{2n} + \cdots$$

et

$$P(X)^2 = a^2X^{2n} + \cdots.$$

Par identification des coefficients dominants :

$$a = a^2.$$

Donc :

$$a = 1.$$

On montre ensuite par identification que les seules solutions sont :

$$\boxed{P(X) = X^n}$$

pour $n \in \mathbb{N}$, ainsi que $P(X) = 0$.
Vérification :

$$(X^n)^2 = X^{2n} = P(X^2).$$

Ainsi :

$$\boxed{P(X) = 0 \quad \text{ou} \quad P(X) = X^n}$$