

Exercices corrigés – Réduction des endomorphismes

Niveau Mathématiques Supérieures

Table des matières

1	Diagonalisation simple	1
2	Matrice non diagonalisable	2
3	Polynôme minimal	3
4	Trigonalisation	3
5	Endomorphismes nilpotents	4
6	Exercice de synthèse	4
7	Méthodes et théorèmes	5

1 Diagonalisation simple

Exercice 1

Soit l'endomorphisme f de \mathbb{R}^2 de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer si A est diagonalisable.

Correction

Calculons le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$

Donc :

$$\chi_A(\lambda) = (3 - \lambda)(2 - \lambda)$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2$$

Comme il y a deux valeurs propres distinctes dans un espace de dimension 2, la matrice est diagonalisable.

Pour $\lambda = 3$:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le système donne :

$$y = 0$$

Ainsi :

$$E_3 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Pour $\lambda = 2$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$x + y = 0$$

Ainsi :

$$E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

2 Matrice non diagonalisable

Exercice 2

Étudier la diagonalisabilité de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction

Le polynôme caractéristique vaut :

$$\chi_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2$$

La seule valeur propre est :

$$\lambda = 1$$

Calculons l'espace propre :

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système donne :

$$y = 0$$

Donc :

$$E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

On a :

$$\dim(E_1) = 1$$

alors que la multiplicité algébrique vaut 2.

Donc A n'est pas diagonalisable.

3 Polynôme minimal

Exercice 3

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer le polynôme minimal de A .

Correction

On écrit :

$$A = 2I + N$$

avec :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or :

$$N^2 = 0$$

mais :

$$N \neq 0$$

Donc :

$$(A - 2I)^2 = 0$$

et :

$$A - 2I \neq 0$$

Le polynôme minimal est donc :

$$\mu_A(X) = (X - 2)^2$$

La matrice n'est pas diagonalisable puisque le polynôme minimal possède une racine multiple.

4 Trigonalisation

Exercice 4

Montrer que toute matrice triangulaire supérieure est trigonalisable.

Correction

Une matrice triangulaire supérieure est déjà triangulaire dans la base canonique.
Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

est déjà sous forme trigonalée.

Ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux :

$$1, \quad 3, \quad 4$$

5 Endomorphismes nilpotents

Exercice 5

Soit :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que N est nilpotente.
- 2) Déterminer son indice de nilpotence.

Correction

Calculons :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et :

$$N^3 = 0$$

Donc N est nilpotente.

Comme :

$$N^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad N^3 = 0$$

l'indice de nilpotence vaut :

$$3$$

6 Exercice de synthèse

Exercice 6

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer les valeurs propres.
- 2) La matrice est-elle diagonalisable ?
- 3) Déterminer le polynôme minimal.

Correction

Le polynôme caractéristique est :

$$\chi_A(\lambda) = (4 - \lambda)^2(2 - \lambda)$$

Les valeurs propres sont :

$$4 \text{ (double)}, \quad 2$$

Pour $\lambda = 4$:

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Le système donne :

$$y = 0, \quad z = 0$$

Donc :

$$\dim(E_4) = 1$$

La multiplicité algébrique vaut 2 tandis que la multiplicité géométrique vaut 1. Donc A n'est pas diagonalisable.

Le bloc associé à 4 est de taille 2, donc :

$$\mu_A(X) = (X - 4)^2(X - 2)$$

7 Méthodes et théorèmes

Méthode générale

Pour étudier la réduction d'un endomorphisme :

1. Calculer le polynôme caractéristique.
2. Déterminer les valeurs propres.
3. Calculer les espaces propres.
4. Comparer multiplicité algébrique et multiplicité géométrique.

5. Conclure :

- diagonalisable ;
- trigonalisable ;
- forme de Jordan éventuelle.

Critère de diagonalisation

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si :

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(E_{\lambda_r}) = n$$

Critère via le polynôme minimal

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Théorème de trigonalisation

Sur \mathbb{C} , tout endomorphisme est trigonalisable.