

Cours d'Équations Différentielles

Mathématiques Supérieures

Table des matières

1	Introduction	2
2	Vocabulaire général	2
2.1	Ordre d'une équation différentielle	2
2.2	Équation linéaire	2
3	Équations différentielles du premier ordre	2
3.1	Équations à variables séparables	2
3.2	Exemple fondamental	3
3.3	Problème de Cauchy	3
4	Équations différentielles linéaires du premier ordre	3
4.1	Forme générale	3
4.2	Méthode de résolution	3
4.2.1	Équation homogène associée	3
4.2.2	Recherche d'une solution particulière	4
4.3	Méthode de variation de la constante	4
4.4	Exemple détaillé	4
5	Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	4
5.1	Forme générale	4
5.2	Équation homogène	5
5.2.1	Cas de deux racines réelles distinctes	5
5.2.2	Cas d'une racine double	5
5.2.3	Cas de racines complexes	5
5.3	Exemples	5
5.3.1	Premier exemple	5
5.3.2	Deuxième exemple	5
6	Recherche d'une solution particulière	5
6.1	Cas usuels	6
6.2	Exemple	6
7	Applications classiques	6
7.1	Croissance exponentielle	6
7.2	Oscillateur harmonique	6
7.3	Circuit RC	6
8	Existence et unicité	7

9 Méthodes à connaître en Math Sup	7
10 Exercices d'entraînement	7
11 Corrections succinctes	7
12 Conclusion	8

1 Introduction

Les équations différentielles jouent un rôle fondamental en mathématiques, en physique et en ingénierie. Elles permettent de modéliser l'évolution d'une grandeur en fonction du temps ou d'une autre variable.

Définition 1.1. Une *équation différentielle* est une relation faisant intervenir une fonction inconnue et certaines de ses dérivées.

Exemples :

$$\begin{aligned}y'(t) &= 3y(t), \\y''(x) + y(x) &= 0, \\y'(x) + 2y(x) &= e^x.\end{aligned}$$

2 Vocabulaire général

2.1 Ordre d'une équation différentielle

Définition 2.1. L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre de la dérivée la plus élevée apparaissant dans l'équation.

Exemples :

- $y' + y = 0$ est d'ordre 1.
- $y'' + y = 0$ est d'ordre 2.

2.2 Équation linéaire

Définition 2.2. Une équation différentielle est dite *linéaire* si la fonction inconnue et ses dérivées apparaissent de manière linéaire.

Forme générale d'une équation linéaire d'ordre 1 :

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

3 Équations différentielles du premier ordre

3.1 Équations à variables séparables

Définition 3.1. Une équation différentielle est dite à variables séparables si elle peut s'écrire :

$$y'(x) = f(x)g(y(x)).$$

On peut alors écrire :

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx.$$

Puis intégrer les deux membres.

3.2 Exemple fondamental

Réolvons :

$$y' = ky.$$

On écrit :

$$\frac{dy}{y} = k dx.$$

En intégrant :

$$\ln |y| = kx + C.$$

Donc :

$$y(x) = Ce^{kx}.$$

3.3 Problème de Cauchy

Définition 3.2. *Un problème de Cauchy consiste à résoudre une équation différentielle avec une condition initiale.*

Exemple :

$$\begin{cases} y' = 2y, \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

La solution générale est :

$$y(x) = Ce^{2x}.$$

La condition initiale donne :

$$3 = Ce^0 = C.$$

Donc :

$$y(x) = 3e^{2x}.$$

4 Équations différentielles linéaires du premier ordre

4.1 Forme générale

Une équation linéaire du premier ordre s'écrit :

$$y' + a(x)y = b(x).$$

4.2 Méthode de résolution

La résolution se fait en deux étapes.

4.2.1 Équation homogène associée

On résout :

$$y' + a(x)y = 0.$$

On obtient :

$$y_h(x) = Ce^{-A(x)},$$

avec

$$A(x) = \int a(x) dx.$$

4.2.2 Recherche d'une solution particulière

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation complète.

La solution générale est alors :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

4.3 Méthode de variation de la constante

On pose :

$$y(x) = C(x)e^{-A(x)}.$$

Après substitution, on obtient une équation sur $C(x)$.

4.4 Exemple détaillé

Résoudre :

$$y' - y = e^x.$$

1. Équation homogène

$$y' - y = 0.$$

Les solutions sont :

$$y_h(x) = Ce^x.$$

2. Variation de la constante On pose :

$$y(x) = C(x)e^x.$$

Alors :

$$y'(x) = C'(x)e^x + C(x)e^x.$$

En substituant :

$$C'(x)e^x = e^x.$$

Donc :

$$C'(x) = 1.$$

Ainsi :

$$C(x) = x + K.$$

Finalement :

$$y(x) = (x + K)e^x.$$

5 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

5.1 Forme générale

$$ay'' + by' + cy = f(x).$$

On distingue :

— l'équation homogène :

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

— l'équation avec second membre.

5.2 Équation homogène

On associe le polynôme caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0.$$

5.2.1 Cas de deux racines réelles distinctes

Si $r_1 \neq r_2$:

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}.$$

5.2.2 Cas d'une racine double

Si $r_1 = r_2 = r$:

$$y(x) = (\lambda x + \mu) e^{rx}.$$

5.2.3 Cas de racines complexes

Si :

$$r = \alpha \pm i\beta,$$

alors :

$$y(x) = e^{\alpha x} (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)).$$

5.3 Exemples

5.3.1 Premier exemple

Résoudre :

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Polynôme caractéristique :

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Racines :

$$r_1 = 2, \quad r_2 = 3.$$

Donc :

$$y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}.$$

5.3.2 Deuxième exemple

Résoudre :

$$y'' + y = 0.$$

Équation caractéristique :

$$r^2 + 1 = 0.$$

Racines :

$$r = \pm i.$$

Donc :

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x.$$

6 Recherche d'une solution particulière

Lorsque le second membre est simple, on peut utiliser la méthode des coefficients indéterminés.

6.1 Cas usuels

Second membre	Forme de la solution particulière
$P(x)$	Polynôme de même degré
e^{ax}	λe^{ax}
$\cos(ax)$ ou $\sin(ax)$	$\lambda \cos(ax) + \mu \sin(ax)$

6.2 Exemple

Résoudre :

$$y'' - y = e^x.$$

1. Équation homogène

$$r^2 - 1 = 0.$$

Donc :

$$y_h(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}.$$

Comme e^x est déjà solution de l'homogène, on cherche :

$$y_p(x) = \alpha x e^x.$$

Après calcul :

$$\alpha = \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$y_p(x) = \frac{1}{2} x e^x.$$

La solution générale est :

$$y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x.$$

7 Applications classiques

7.1 Croissance exponentielle

$$y' = ky.$$

- Si $k > 0$: croissance.
- Si $k < 0$: décroissance.

7.2 Oscillateur harmonique

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Solutions :

$$y(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

7.3 Circuit RC

$$RC u'(t) + u(t) = E.$$

Cette équation modélise la charge d'un condensateur.

8 Existence et unicité

Théorème 8.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz — version admise). *Sous des hypothèses de régularité suffisantes, un problème de Cauchy admet une unique solution locale.*

Ce théorème garantit que les modèles différentiels sont bien posés.

9 Méthodes à connaître en Math Sup

- Séparation des variables.
- Résolution des équations linéaires du premier ordre.
- Variation de la constante.
- Polynôme caractéristique.
- Recherche de solutions particulières.
- Utilisation des conditions initiales.

10 Exercices d'entraînement

Exercice 1

Résoudre :

$$y' = 3y.$$

Exercice 2

Résoudre :

$$y' + 2y = e^x.$$

Exercice 3

Résoudre :

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Exercice 4

Résoudre :

$$y'' + 4y = \cos(2x).$$

Exercice 5

Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

11 Corrections succinctes

Exercice 1

$$y(x) = Ce^{3x}.$$

Exercice 2

Solution générale :

$$y(x) = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x.$$

Exercice 3

Racine double $r = 2$:

$$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{2x}.$$

Exercice 4

Solution homogène :

$$y_h(x) = \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x).$$

Comme résonance, on cherche :

$$y_p(x) = ax \sin(2x).$$

Exercice 5

$$y(x) = \cos x.$$

12 Conclusion

Les équations différentielles constituent un outil central pour la modélisation scientifique. En Mathématiques Supérieures, il est essentiel de maîtriser les techniques classiques de résolution ainsi que l'interprétation qualitative des solutions.