Cours de Mathématiques

Développements limités

Niveau Mathématiques Supérieures

Table des matières

1 Introduction

Les développements limités (DL) constituent un outil fondamental de l'analyse. Ils permettent d'approcher localement une fonction par un polynôme, généralement au voisinage d'un point.

Les usages principaux sont :

- calcul de limites ;
- étude locale des fonctions ;
- comparaison de fonctions ;
- recherche d'asymptotes ;
- résolution d'équations ;
- approximation numérique.

Dans tout le cours, sauf mention contraire, on étudie les fonctions au voisinage de 0.

2 Notation petit o

Définition 1. *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a.*

On dit que

$$f(x) = o(g(x)) \quad \textit{quand } x \to a$$

si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Exemple 1.

$$x^2 = o(x) \quad \textit{quand } x \to 0,$$

car

$$\frac{x^2}{x} = x \to 0.$$

Propriété 1. *Si*

$$f(x) = o(x^n),$$

alors f est négligeable devant x^n au voisinage de 0.

Remarque 1. *Le symbole $o(x^n)$ désigne une fonction, et non un nombre.*

3 Définition d'un développement limité

Définition 2. *Soit f une fonction définie au voisinage de 0.*

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 si :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Le polynôme

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

est appelé la partie régulière du DL.

4 Formule de Taylor

Théorème 1 (Taylor-Young)**.** *Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0.*
Alors :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Remarque 2. *Les coefficients du DL sont donc liés aux dérivées successives de la fonction.*

5 Développements limités usuels

5.1 Fonction exponentielle

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

5.2 Fonctions trigonométriques

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

5.3 Fonction logarithme

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

5.4 Puissances

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2).$$

Cas particuliers :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3).$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$

6 Opérations sur les développements limités

6.1 Somme

On additionne les coefficients de même degré.

6.2 Produit

On multiplie comme des polynômes ordinaires puis on tronque à l'ordre voulu.

Exemple 2. *Calculons un DL de*

$$e^x \cos x$$

à l'ordre 2.

On utilise :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Donc :

$$e^x \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2).$$

Ainsi :

$$e^x \cos x = 1 + x + o(x^2).$$

7 Composition des développements limités

Propriété 2. *On peut composer des DL si la fonction intérieure tend vers* 0*.*

Exemple 3. *Calcul de :*

$$\ln(1 + \sin x).$$

Or :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Puis :

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$

En remplaçant u par $\sin x$ *:*

$$\ln(1 + \sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

8 Applications aux limites

Exemple 4. *Calculer :*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

On utilise :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Donc :

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Ainsi :

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1).$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

9 Position relative d'une courbe

Les DL permettent de comparer localement une fonction à sa tangente.

Exemple 5. *Étudier la position de :*

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

par rapport à sa tangente en 0.

DL :

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

La tangente est donc :

$$y = x.$$

Or :

$$f(x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Comme $-\frac{x^2}{2} \leq 0$, *la courbe est sous sa tangente au voisinage de* 0.

10 Développements limités en un point a

Pour obtenir un DL en a, on pose :

$$h = x - a.$$

Puis on développe en puissances de h.

Exemple 6. *DL de* $\ln x$ *au voisinage de* 1.

On écrit :

$$x = 1 + h.$$

Donc :

$$\ln x = \ln(1 + h).$$

Ainsi :

$$\ln x = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2).$$

Soit :

$$\boxed{\ln x = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + o((x - 1)^2)}$$

11 Méthodologie

11.1 Pour calculer une limite

1. Identifier les formes indéterminées.
2. Choisir les DL adaptés.
3. Développer à l'ordre minimal utile.
4. Simplifier.

11.2 Choix de l'ordre

Il faut développer jusqu'au premier terme non nul après simplification.

12 Erreurs classiques

— Oublier le terme $o(x^n)$.
— Développer à un ordre insuffisant.
— Composer des DL sans vérifier que la variable tend vers 0.
— Confondre égalité exacte et approximation.

13 Exercices

Exercice 1

Déterminer un DL à l'ordre 3 de :

$$\frac{1}{1+x}.$$

Exercice 2

Calculer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

Exercice 3

Déterminer un DL à l'ordre 4 de :

$$e^x \ln(1+x).$$

Exercice 4

Étudier la position locale de :

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

par rapport à sa tangente en 0.

14 Corrigés rapides

Exercice 1

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3).$$

Exercice 2

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}}$$

15 Conclusion

Les développements limités sont un outil central en analyse. Ils permettent de remplacer localement des fonctions compliquées par des polynômes simples à manipuler.

La maîtrise des DL repose sur :

- la connaissance des DL usuels ;
- la pratique des opérations ;
- le choix pertinent de l'ordre ;
- l'entraînement régulier.