Cours : Fonctions de plusieurs variables

Niveau Mathématiques Supérieures

Table des matières

1 Introduction

Dans de nombreux phénomènes physiques, économiques ou géométriques, une grandeur dépend simultanément de plusieurs paramètres.

Par exemple :

— la température dans une pièce dépend de la position (x, y, z) ;

— la pression d'un gaz dépend du volume et de la température ;

— l'altitude d'un terrain dépend des coordonnées horizontales.

On est ainsi conduit à étudier des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$.

2 Fonctions de plusieurs variables

2.1 Définition

Définition 2.1. Une fonction de plusieurs variables est une application

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

où D est une partie de $\mathbb{R}^n$.

Dans ce cours, on se limitera souvent au cas $n = 2$.

Une fonction de deux variables s'écrit donc

$$f(x, y).$$

Exemple 2.2.

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Cette fonction associe à chaque point du plan un nombre réel.

2.2 Représentation géométrique

Le graphe d'une fonction de deux variables est une surface de l'espace :

$$z = f(x, y).$$

Par exemple, le graphe de

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

est un paraboloïde.

3 Domaines de définition

Comme pour les fonctions d'une variable, certaines contraintes peuvent apparaître.

Exemple 3.1. Considérons

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Il faut :

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0.$$

Donc le domaine est

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

C'est le disque unité.

Exemple 3.2.

$$f(x, y) = \ln(x - y).$$

Le domaine est

$$x - y > 0.$$

C'est un demi-plan.

4 Courbes de niveau

Définition 4.1. Les courbes de niveau d'une fonction f sont les ensembles définis par

$$f(x, y) = k$$

où k est une constante réelle.

Exemple 4.2. Pour

$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

les courbes de niveau sont

$$x^2 + y^2 = k.$$

Ce sont des cercles de centre O.

Les courbes de niveau jouent un rôle fondamental en géométrie et en physique.

5 Limites et continuité

5.1 Limite

Définition 5.1. On dit que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \ell$$

si les valeurs de $f(x, y)$ se rapprochent de ℓ lorsque (x, y) se rapproche de (a, b).

La difficulté principale est qu'on peut approcher (a, b) suivant une infinité de chemins.

5.2 Méthode

Pour montrer qu'une limite n'existe pas, il suffit souvent de trouver deux chemins donnant deux limites différentes.

Exemple 5.2. Étudions

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

en $(0, 0)$.

Chemin 1 : $y = x$

$$f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Chemin 2 : $y = 0$

$$f(x, 0) = 0.$$

Les limites sont différentes.
Donc la limite n'existe pas.

5.3 Continuité

Définition 5.3. La fonction f est continue en (a, b) si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Les fonctions polynomiales sont continues sur tout $\mathbb{R}^2$.

6 Dérivées partielles

6.1 Définition

Définition 6.1. La dérivée partielle de f par rapport à x est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}.$$

On dérive par rapport à x en considérant y comme constant.
De même :

$$\frac{\partial f}{\partial y}.$$

6.2 Exemple

Soit

$$f(x,y) = x^2 y + 3xy^2.$$

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3y^2$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 6xy.$$

6.3 Interprétation géométrique

Les dérivées partielles représentent les taux de variation suivant les axes.

7 Différentielle et gradient

7.1 Gradient

Définition 7.1. Le gradient de f est le vecteur

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Exemple 7.2. Pour

$$f(x,y) = x^2 + y^2,$$

on obtient

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y).$$

7.2 Propriétés du gradient

Le gradient :
— est orthogonal aux courbes de niveau ;
— indique la direction de plus forte croissance ;
— intervient dans les problèmes d'optimisation.

8 Dérivées secondes

8.1 Définition

On peut dériver plusieurs fois.
On obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Exemple 8.1. Pour

$$f(x,y) = x^2y + xy^2,$$

on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 2y.$$

8.2 Théorème de Schwarz

Théorème 8.2. Si les dérivées partielles secondes sont continues, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

9 Développement limité à l'ordre 1

Si f est différentiable,

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k + o(\sqrt{h^2+k^2}).$$

Le plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ est donc

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b).$$

10 Extrema locaux

10.1 Points critiques

Définition 10.1. Un point critique est un point où

$$\nabla f = 0.$$

10.2 Méthode de recherche

Pour trouver les extrema :

1. calculer les dérivées partielles ;
2. résoudre
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$
3. étudier la nature des points critiques.

10.3 Matrice hessienne

Définition 10.2. La matrice hessienne est

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

On pose

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2.$$

— Si $D > 0$ et $f_{xx} > 0$: minimum local.
— Si $D > 0$ et $f_{xx} < 0$: maximum local.
— Si $D < 0$: point selle.
— Si $D = 0$: test insuffisant.

11 Exemple complet

Étudions

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y.$$

Étape 1 : dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4.$$

Étape 2 : point critique

$$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1,$$
$$2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2.$$

Le point critique est $(1, 2)$.

Étape 3 : hessienne

$$f_{xx} = 2, \qquad f_{yy} = 2, \qquad f_{xy} = 0.$$

Donc

$$D = 4 > 0.$$

Comme $f_{xx} > 0$, il s'agit d'un minimum local.

12 Applications

Les fonctions de plusieurs variables interviennent dans :
— la mécanique ;
— la thermodynamique ;
— l'optimisation ;
— l'intelligence artificielle ;
— l'économie ;
— la géométrie différentielle.

13 Exercices

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition de

$$f(x, y) = \sqrt{x - y^2}.$$

Exercice 2

Calculer les dérivées partielles de

$$f(x, y) = x^3y^2 + e^{xy}.$$

Exercice 3

Étudier les extrema de

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy.$$

Exercice 4

Étudier l'existence de la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^2}.$$

14 Conclusion

L'étude des fonctions de plusieurs variables généralise l'analyse classique à des espaces de dimension supérieure.

Les notions fondamentales sont :

— le domaine de définition ;
— les courbes de niveau ;
— les dérivées partielles ;
— le gradient ;
— les extrema.

Ces outils constituent la base de l'analyse avancée et des mathématiques appliquées.