Cours d'intégration
Niveau Mathématiques Supérieures

Table des matières

1 Introduction

L'intégration constitue l'un des outils fondamentaux de l'analyse. Elle permet :

— de calculer des aires ;
— de déterminer des primitives ;
— d'étudier des phénomènes physiques ;
— de résoudre des équations différentielles ;
— de définir des probabilités continues.

Le calcul intégral repose essentiellement sur le lien entre dérivation et intégration, exprimé par le théorème fondamental de l'analyse.

2 Primitives

2.1 Définition

Définition 2.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.*
Une fonction F est appelée ***primitive*** *de f sur I si :*

$$F'(x) = f(x)$$

pour tout $x \in I$.

2.2 Existence des primitives

Théorème 2.2. *Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.*

2.3 Unicité à constante près

Propriété 2.3. *Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I, alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que*

$$F(x) = G(x) + C.$$

2.4 Primitives usuelles

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

3 Intégrale définie

3.1 Définition intuitive

L'intégrale d'une fonction positive sur un segment représente l'aire située sous sa courbe.

3.2 Définition

Définition 3.1. *Soit f continue sur $[a, b]$.*

L'intégrale de f entre a et b est notée

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

3.3 Propriétés fondamentales

Propriété 3.2 (Linéarité)**.** *Pour tous réels λ, μ,*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Propriété 3.3 (Relation de Chasles)**.**

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Propriété 3.4 (Positivité)**.** *Si $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

4 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 4.1. *Soit f continue sur $[a, b]$.*

La fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est dérivable sur $[a, b]$ et vérifie

$$F'(x) = f(x).$$

De plus, si G est une primitive de f, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

4.1 Conséquence pratique

Le calcul d'une intégrale se ramène à la recherche d'une primitive.

Exemple 4.2. *Calculer*

$$\int_0^1 x^2\,dx.$$

Une primitive de x^2 est

$$F(x) = \frac{x^3}{3}.$$

Donc

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

5 Techniques de calcul

5.1 Intégration par parties

Théorème 5.1. *Si u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

5.2 Méthode pratique

On choisit généralement :

— u : fonction qui se simplifie lorsqu'on dérive ;

— v' : fonction facile à intégrer.

Exemple 5.2. *Calculer*

$$\int_0^1 xe^x\,dx.$$

On pose

$$u(x) = x, \qquad v'(x) = e^x.$$

Alors

$$u'(x) = 1, \qquad v(x) = e^x.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx.$$

Donc

$$= e - (e-1) = 1.$$

5.3 Changement de variable

Théorème 5.3. *Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.*
Alors

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du.$$

Exemple 5.4. *Calculer*

$$\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx.$$

Posons

$$u = x^2.$$

Alors

$$du = 2x\,dx.$$

Donc

$$\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx = \int_0^1 e^u\,du = e - 1.$$

6 Fonctions intégrables

6.1 Fonctions continues

Toute fonction continue sur un segment est intégrable.

6.2 Fonctions continues par morceaux

Une fonction présentant un nombre fini de discontinuités simples reste intégrable.

7 Intégrales impropres

7.1 Définition

Certaines intégrales portent sur un intervalle non borné ou concernent une fonction non bornée.

Définition 7.1. *On définit*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx$$

lorsque cette limite existe.

7.2 Exemple classique

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1.$$

L'intégrale converge.

En revanche,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

diverge.

8 Encadrements et inégalités

8.1 Croissance

Propriété 8.1. *Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

8.2 Valeur moyenne

Théorème 8.2. *Si f est continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

9 Applications géométriques

9.1 Calcul d'aires

Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, l'aire sous la courbe est

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

9.2 Calcul de volumes

Volume d'un solide de révolution :

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

10 Méthodes classiques à maîtriser

1. Recherche immédiate d'une primitive.
2. Intégration par parties.
3. Changement de variable.
4. Décomposition en éléments simples.
5. Utilisation de symétries.
6. Encadrements et comparaisons.

11 Exercices d'application

Exercice 1

Calculer

$$\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) \, dx.$$

Exercice 2

Calculer

$$\int_0^\pi \sin x \, dx.$$

Exercice 3

Calculer

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx.$$

Exercice 4

Étudier la convergence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \, dx.$$

12 Corrigés succincts

Exercice 1

$$\Big[x^3 - x^2 + x\Big]_0^2 = 6.$$

Exercice 2

$$[-\cos x]_0^\pi = 2.$$

Exercice 3

Poser $u = \ln x$.
Résultat :

$$\frac{1}{2}.$$

Exercice 4

L'intégrale converge si et seulement si

$$\alpha > 1.$$

13 Conclusion

Le calcul intégral constitue un pilier fondamental de l'analyse. En classe préparatoire scientifique, il est essentiel de maîtriser :

- les primitives usuelles ;
- les techniques de calcul ;
- les propriétés théoriques ;
- les méthodes de comparaison ;
- les intégrales impropres.

La pratique régulière des exercices est indispensable pour acquérir rapidité et rigueur.