Cours de Mathématiques
Limites, continuité et dérivabilité

Niveau Mathématiques Supérieures

Table des matières

1 Limites de fonctions

1.1 Introduction

L'étude des limites constitue la base de l'analyse. Elle permet de décrire le comportement d'une fonction au voisinage d'un point ou à l'infini.

On considère dans tout le cours une fonction

$$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

1.2 Limite en un point

Définition 1.1. *Soit a un point adhérent à D et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D, \quad 0 < |x - a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Remarque. La condition $0 < |x - a|$ signifie que l'on exclut éventuellement le point a lui-même.

Exemple 1.2. Considérons

$$f(x) = 2x + 1.$$

Alors

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 7.$$

En effet,

$$|f(x) - 7| = |2x + 1 - 7| = 2|x - 3|.$$

Il suffit donc de prendre $\eta = \varepsilon/2$.

1.3 Limites latérales

Définition 1.3. *On dit que*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$$

si la limite vaut ℓ lorsque $x > a$.

De même,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$$

désigne la limite à gauche.

Propriété 1.4. *La limite en a existe si et seulement si les deux limites latérales existent et sont égales.*

Exemple 1.5. La fonction

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

n'admet pas de limite en 0 car

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

1.4 Limites infinies

Définition 1.6. *On dit que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

si

$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0, \quad 0 < |x - a| < \eta \implies f(x) > A.$$

Exemple 1.7.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

1.5 Limites à l'infini

Définition 1.8. *On dit que*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}, \quad x > A \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Exemple 1.9.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

1.6 Opérations sur les limites

Théorème 1.10. *Soient f et g deux fonctions admettant des limites finies en a. Si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell, \qquad \lim_{x \to a} g(x) = m,$$

alors :

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \ell + m,$$
$$\lim_{x \to a} (fg)(x) = \ell m,$$
$$\lim_{x \to a} (\lambda f)(x) = \lambda \ell.$$

Si de plus $m \neq 0$, alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}.$$

1.7 Croissances comparées

Théorème 1.11. *Lorsque $x \to +\infty$:*

$$\ln x = o(x^\alpha) \quad (\alpha > 0),$$

$$x^\alpha = o(e^x),$$
$$(\ln x)^\beta = o(x^\alpha).$$

Remarque. L'exponentielle domine les puissances, qui dominent elles-mêmes les logarithmes.

2 Continuité

2.1 Définition

Définition 2.1. *Une fonction f est continue en $a \in D$ si :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Exemple 2.2. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2.3. La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en 0.

2.2 Continuité sur un intervalle

Définition 2.4. *Une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.*

2.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2.5 (TVI)**.** *Soit f continue sur un segment $[a, b]$. Alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe*

$$c \in [a, b]$$

tel que

$$f(c) = y.$$

Corollaire 2.6. *Si f est continue sur $[a, b]$ et si*

$$f(a)f(b) < 0,$$

alors f possède au moins une racine dans $]a, b[$.

Exemple 2.7. L'équation

$$x^3 + x - 1 = 0$$

admet une solution dans $[0, 1]$.

2.4 Fonctions continues sur un segment

Théorème 2.8. *Toute fonction continue sur un segment est :*

- *bornée ;*
- *atteint ses bornes.*

Théorème 2.9 (Heine)**.** *Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.*

2.5 Composition de fonctions continues

Propriété 2.10. *Si f est continue en a et g continue en $f(a)$, alors*

$$g \circ f$$

est continue en a.

3 Dérivabilité

3.1 Définition

Définition 3.1. *La fonction f est dérivable en a si la limite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existe et est finie.

Cette limite est notée

$$f'(a).$$

Remarque. La dérivée représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe en a.

Exemple 3.2. Pour

$$f(x) = x^2,$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h}\\ &= \frac{2ah+h^2}{h}\\ &= 2a+h.\end{aligned}$$

En faisant tendre h vers 0,

$$f'(a) = 2a.$$

3.2 Interprétation géométrique

L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

3.3 Dérivabilité et continuité

Théorème 3.3. *Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.*

Remarque. La réciproque est fausse. La fonction

$$f(x) = |x|$$

est continue en 0 mais non dérivable en 0.

3.4 Règles de dérivation

Théorème 3.4. *Soient u et v dérivables. Alors :*

$$\begin{aligned}(u+v)' &= u'+v',\\ (\lambda u)' &= \lambda u',\\ (uv)' &= u'v+uv',\\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v-uv'}{v^2}.\end{aligned}$$

Propriété 3.5 (Dérivée d'une composée)**.** *Si u est dérivable en a et v dérivable en $u(a)$, alors*

$$(v\circ u)'(a) = v'(u(a))u'(a).$$

3.5 Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$

3.6 Théorème de Rolle

Théorème 3.6 (Rolle)**.** *Soit f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que*

$$f(a) = f(b).$$

Alors il existe

$$c \in]a,b[$$

tel que

$$f'(c) = 0.$$

3.7 Théorème des accroissements finis

Théorème 3.7 (TAF)**.** *Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe*

$$c \in]a,b[$$

tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Corollaire 3.8. *Si $f' = 0$ sur un intervalle, alors f est constante sur cet intervalle.*

Corollaire 3.9. *Si $f' \geq 0$ sur un intervalle, alors f est croissante.*

3.8 Étude locale des fonctions

Propriété 3.10. *Si $f'(a) > 0$, alors la fonction est localement croissante au voisinage de a.*

Définition 3.11. *On dit que a est un point critique si*

$$f'(a) = 0.$$

Propriété 3.12. *Si :*

- *f' change de signe de $+$ vers $-$ en a, alors f admet un maximum local ;*
- *f' change de signe de $-$ vers $+$ en a, alors f admet un minimum local.*

4 Exercices

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 5},$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x},$$
$$\lim_{x \to +\infty} xe^{-x}.$$

Exercice 2

Étudier la continuité de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 3

Étudier les variations de

$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

Exercice 4

Montrer que l'équation

$$e^x = x + 2$$

admet une unique solution réelle.

5 Méthodes classiques

Pour les limites

- Factoriser le terme dominant.
- Utiliser les équivalents usuels.
- Employer les croissances comparées.
- Chercher une forme conjuguée.

Pour la continuité

- Vérifier l'existence de la limite.
- Comparer avec la valeur de la fonction.
- Utiliser les opérations sur les fonctions continues.

Pour la dérivabilité

- Calculer le taux d'accroissement.
- Simplifier avant le passage à la limite.
- Étudier le signe de la dérivée.

6 Conclusion

Les notions de limite, continuité et dérivabilité forment le socle de l'analyse classique. Elles permettent :

— d'étudier le comportement local et global des fonctions ;

— de résoudre des problèmes d'optimisation ;

— de justifier rigoureusement les méthodes du calcul différentiel.

La maîtrise des définitions et des théorèmes fondamentaux est indispensable en classes préparatoires scientifiques.