

# Suites et Séries

## Cours de Mathématiques Supérieures

### Table des matières

<b>1 Suites numériques</b>	<b>2</b>
1.1 Définition . . . . .	2
1.2 Limite d'une suite . . . . .	2
1.2.1 Définition . . . . .	2
1.2.2 Limites infinies . . . . .	2
<b>2 Théorèmes fondamentaux</b>	<b>2</b>
2.1 Unicité de la limite . . . . .	2
2.2 Opérations sur les limites . . . . .	2
<b>3 Suites monotones</b>	<b>3</b>
3.1 Définitions . . . . .	3
3.2 Théorème de convergence monotone . . . . .	3
<b>4 Suites récurrentes</b>	<b>3</b>
4.1 Méthode générale . . . . .	3
4.2 Exemple . . . . .	3
<b>5 Croissances comparées</b>	<b>3</b>
<b>6 Séries numériques</b>	<b>4</b>
6.1 Définition . . . . .	4
6.2 Condition nécessaire . . . . .	4
<b>7 Séries géométriques</b>	<b>4</b>
<b>8 Séries à termes positifs</b>	<b>4</b>
8.1 Critère de comparaison . . . . .	4
8.2 Séries de Riemann . . . . .	5
<b>9 Critère de d'Alembert</b>	<b>5</b>
<b>10 Critère de Cauchy</b>	<b>5</b>
<b>11 Séries alternées</b>	<b>5</b>
<b>12 Convergence absolue</b>	<b>5</b>

<b>13 Développements limités usuels</b>	<b>6</b>
13.1 Exponentielle . . . . .	6
13.2 Logarithme . . . . .	6
13.3 Sinus . . . . .	6
13.4 Cosinus . . . . .	6
<b>14 Séries entières</b>	<b>6</b>
<b>15 Exercices classiques</b>	<b>6</b>
<b>16 Pièges classiques</b>	<b>7</b>
<b>17 Formulaire minimal</b>	<b>7</b>
<b>18 Ouvertures</b>	<b>7</b>

# 1 Suites numériques

## 1.1 Définition

Une suite réelle est une application

$$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

On note généralement :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Le réel associé à l'entier  $n$  est noté  $u_n$ .

## 1.2 Limite d'une suite

### 1.2.1 Définition

On dit que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On note :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell.$$

### 1.2.2 Limites infinies

On écrit :

$$u_n \rightarrow +\infty$$

si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N, \forall n \geq N, u_n \geq A.$$

# 2 Théorèmes fondamentaux

## 2.1 Unicité de la limite

**Théorème :**

Une suite convergente possède une unique limite.

## 2.2 Opérations sur les limites

Si :

$$u_n \rightarrow \ell, \quad v_n \rightarrow m,$$

alors :

$$u_n + v_n \rightarrow \ell + m,$$

$$u_n v_n \rightarrow \ell m,$$

$$\frac{u_n}{v_n} \rightarrow \frac{\ell}{m} \quad \text{si } m \neq 0.$$

### 3 Suites monotones

#### 3.1 Définitions

—  $(u_n)$  est croissante si :

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

—  $(u_n)$  est décroissante si :

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

#### 3.2 Théorème de convergence monotone

**Théorème :**

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.

### 4 Suites récurrentes

Considérons une suite définie par :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

#### 4.1 Méthode générale

1. Montrer que la suite est bien définie.
2. Étudier sa monotonie.
3. Trouver des bornes.
4. Déterminer une éventuelle limite  $\ell$ .
5. Résoudre :

$$\ell = f(\ell).$$

#### 4.2 Exemple

Soit :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{2}{u_n} \right), \quad u_0 > 0.$$

Si la suite converge vers  $\ell$ , alors :

$$\ell = \frac{1}{2} \left( \ell + \frac{2}{\ell} \right).$$

Donc :

$$\ell^2 = 2.$$

Comme  $\ell > 0$ ,

$$\ell = \sqrt{2}.$$

### 5 Croissances comparées

Pour tout  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ ,

$$(\ln n)^\alpha = o(n^\beta).$$

Pour tout  $a > 1$ ,

$$n^\beta = o(a^n).$$

Ainsi :

$$\ln n \ll n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n.$$

## 6 Séries numériques

### 6.1 Définition

À une suite  $(u_n)$ , on associe :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

La série :

$$\sum u_n$$

converge si la suite  $(S_n)$  converge.

### 6.2 Condition nécessaire

Si :

$$\sum u_n$$

converge, alors :

$$u_n \rightarrow 0.$$

Attention : la réciproque est fausse.

Exemple :

$$\sum \frac{1}{n}$$

diverge.

## 7 Séries géométriques

**Théorème :**

La série :

$$\sum q^n$$

converge si et seulement si :

$$|q| < 1.$$

Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

## 8 Séries à termes positifs

### 8.1 Critère de comparaison

Soient deux suites positives  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

Si :

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

à partir d'un certain rang :

- si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge ;
- si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge.

## 8.2 Séries de Riemann

La série :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

converge si et seulement si :

$$\alpha > 1.$$

## 9 Critère de d'Alembert

Supposons :

$$u_n > 0.$$

Si :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell,$$

alors :

- si  $\ell < 1$ , la série converge ;
- si  $\ell > 1$ , elle diverge.

## 10 Critère de Cauchy

Si :

$$\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ell,$$

alors :

- convergence si  $\ell < 1$ ,
- divergence si  $\ell > 1$ .

## 11 Séries alternées

**Critère spécial des séries alternées :**

Si :

1.  $u_n \geq 0$ ,
2.  $(u_n)$  décroît,
3.  $u_n \rightarrow 0$ ,

alors :

$$\sum (-1)^n u_n$$

converge.

Exemple :

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}.$$

## 12 Convergence absolue

Si :

$$\sum |u_n|$$

converge, alors :

$$\sum u_n$$

converge.

La réciproque est fausse.

## 13 Développements limités usuels

### 13.1 Exponentielle

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

### 13.2 Logarithme

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

### 13.3 Sinus

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

### 13.4 Cosinus

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

## 14 Séries entières

Une série entière est une série de la forme :

$$\sum a_n x^n.$$

Il existe un rayon  $R \in [0, +\infty]$  tel que :

- convergence pour  $|x| < R$ ,
- divergence pour  $|x| > R$ .

## 15 Exercices classiques

### Exercice 1

Étudier :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Montrer que :

$$u_n \rightarrow e.$$

### Exercice 2

Étudier la nature de :

$$\sum \frac{1}{n^2 + 1}.$$

**Exercice 3**

Étudier :

$$\sum \frac{\ln n}{n}.$$

**Exercice 4**

Étudier :

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Convergence simple ? absolue ?

**16 Pièges classiques**

— Confondre :

$$u_n \rightarrow 0$$

et convergence de série.

— Oublier les hypothèses du critère des séries alternées.

— Utiliser d'Alembert lorsque la limite vaut 1.

— Employer des équivalents avec des termes non positifs sans précaution.

**17 Formulaire minimal**

$$\frac{\ln n}{n^\alpha} \rightarrow 0,$$

$$\frac{n^\alpha}{a^n} \rightarrow 0,$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e.$$

$$\sum q^n$$

converge si :

$$|q| < 1.$$

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

converge si :

$$\alpha > 1.$$

**18 Ouvertures**

Les suites et séries conduisent à :

- l'intégration ;
- les équations différentielles ;
- les séries de Fourier ;
- l'analyse fonctionnelle ;
- les probabilités ;
- les espaces normés.