

# Exercices corrigés — Équations différentielles

Niveau Mathématiques Supérieures

## Exercice 1 — Équation différentielle linéaire du premier ordre

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle

$$y'(x) - 2y(x) = e^{2x}.$$

### Correction

L'équation homogène associée est

$$y' - 2y = 0.$$

Les solutions sont

$$y_h(x) = Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = axe^{2x}.$$

Alors

$$y_p'(x) = ae^{2x} + 2axe^{2x}.$$

En remplaçant dans l'équation :

$$(ae^{2x} + 2axe^{2x}) - 2(axe^{2x}) = e^{2x}.$$

Il vient

$$ae^{2x} = e^{2x},$$

donc  $a = 1$ .

Une solution particulière est donc

$$y_p(x) = xe^{2x}.$$

Ainsi, les solutions générales sont

$$\boxed{y(x) = Ce^{2x} + xe^{2x}}.$$

## Exercice 2 — Équation à variables séparées

Résoudre sur l'intervalle où cela a un sens

$$y' = xy^2.$$

## Correction

On suppose  $y \neq 0$ .

On sépare les variables :

$$\frac{dy}{y^2} = x dx.$$

On intègre :

$$\int y^{-2} dy = \int x dx.$$

D'où

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{y} = -\frac{x^2}{2} + C'.$$

Finalement,

$$y(x) = \frac{1}{C - \frac{x^2}{2}}.$$

Il faut ajouter la solution nulle :

$$y(x) = 0.$$

## Exercice 3 — Équation linéaire avec condition initiale

Résoudre

$$y' + y = \cos x,$$

avec la condition initiale

$$y(0) = 1.$$

## Correction

L'équation homogène associée :

$$y' + y = 0$$

admet pour solutions

$$y_h(x) = Ce^{-x}.$$

Cherchons une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = a \cos x + b \sin x.$$

Alors

$$y_p'(x) = -a \sin x + b \cos x.$$

Donc

$$y_p' + y_p = (a + b) \cos x + (b - a) \sin x.$$

On identifie avec  $\cos x$  :

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ b - a = 0. \end{cases}$$

On obtient

$$a = b = \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$y(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x).$$

Condition initiale :

$$1 = C + \frac{1}{2}.$$

Donc

$$C = \frac{1}{2}.$$

Finalement,

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x).$$

## Exercice 4 — Équation du second ordre

Résoudre

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

### Correction

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

On factorise :

$$(r - 2)(r - 3) = 0.$$

Les racines sont 2 et 3.

Les solutions sont donc

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}.$$

## Exercice 5 — Second ordre avec second membre

Résoudre

$$y'' + y = x.$$

### Correction

L'équation homogène associée est

$$y'' + y = 0.$$

Son équation caractéristique est

$$r^2 + 1 = 0.$$

Les racines sont  $i$  et  $-i$ .

Donc

$$y_h(x) = A \cos x + B \sin x.$$

Cherchons une solution particulière polynomiale sous la forme

$$y_p(x) = ax + b.$$

Alors

$$y_p''(x) = 0.$$

En remplaçant :

$$0 + ax + b = x.$$

On identifie :

$$a = 1, \quad b = 0.$$

Ainsi,

$$y_p(x) = x.$$

La solution générale est donc

$$\boxed{y(x) = A \cos x + B \sin x + x}.$$

## Exercice 6 — Équation de Bernoulli

Résoudre

$$y' + y = y^2.$$

### Correction

On écrit

$$y' + y = y^2.$$

Posons

$$z = \frac{1}{y}.$$

Alors

$$z' = -\frac{y'}{y^2}.$$

Or

$$y' = y^2 - y.$$

Donc

$$z' = -1 + z.$$

Ainsi,

$$z' - z = -1.$$

L'équation homogène associée donne

$$z_h = Ce^x.$$

Une solution particulière constante vaut 1.

Donc

$$z(x) = Ce^x + 1.$$

Comme  $z = 1/y$ ,

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{Ce^x + 1}}.$$

On ajoute la solution nulle si nécessaire.

## Exercice 7 — Équation différentielle et existence globale

Résoudre

$$y' = y.$$

avec

$$y(0) = 3.$$

## Correction

L'équation est à variables séparées :

$$\frac{dy}{y} = dx.$$

On intègre :

$$\ln |y| = x + C.$$

Donc

$$y = Ce^x.$$

Avec la condition initiale :

$$3 = C.$$

Ainsi,

$$\boxed{y(x) = 3e^x}.$$