

# Exercices corrigés de développements limités

## Niveau Math Sup

### Table des matières

1	Rappels	1
2	Exercices fondamentaux	1
3	Compositions de développements limités	2
4	Applications des développements limités	3
5	Exercices plus difficiles	4
6	Problèmes de synthèse	5

## 1 Rappels

On rappelle les développements limités usuels au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

## 2 Exercices fondamentaux

### Exercice 1

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de

$$f(x) = e^x \cos x.$$

### Correction

On écrit :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

On multiplie :

$$e^x \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^4).$$

Calcul des termes utiles :

$$e^x \cos x = 1 + x + 0 \cdot x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4).$$

Ainsi :

$$e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4).$$

## Exercice 2

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de

$$f(x) = \ln(1+x) e^x.$$

### Correction

On utilise :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

et

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Produit :

$$f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3).$$

On obtient :

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

## 3 Compositions de développements limités

### Exercice 3

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de

$$f(x) = \sin(\ln(1+x)).$$

### Correction

Posons

$$u = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

Comme

$$\sin u = u - \frac{u^3}{6} + o(u^4),$$

on calcule :

$$u^3 = x^3 - \frac{3}{2}x^4 + o(x^4).$$

Donc

$$\begin{aligned}\sin(\ln(1+x)) &= u - \frac{u^3}{6} + o(x^4) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^4).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\sin(\ln(1+x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^4).}$$

#### Exercice 4

Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de

$$f(x) = \tan x.$$

#### Correction

On utilise :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

On cherche

$$\tan x = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5).$$

Comme

$$\tan x \cos x = \sin x,$$

on écrit :

$$(ax + bx^3 + cx^5) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

Identification :

$$a = 1,$$

$$b - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{3},$$

$$c - \frac{b}{2} + \frac{1}{24} = \frac{1}{120}.$$

Donc

$$c = \frac{2}{15}.$$

Finalement :

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).}$$

## 4 Applications des développements limités

### Exercice 5 — Limite

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2}.$$

### Correction

On écrit :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} e^x - \cos x - x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - x + o(x^2) \\ &= x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2} = 1.}$$

### Exercice 6 — Position relative

Étudier la position relative de la courbe de

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

par rapport à sa tangente en 0.

### Correction

La tangente en 0 est :

$$y = x.$$

Or :

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Ainsi :

$$\ln(1 + x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Comme le terme dominant est négatif, on obtient :

La courbe est située sous sa tangente au voisinage de 0.

## 5 Exercices plus difficiles

### Exercice 7

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de

$$f(x) = \frac{\ln(1 + x)}{1 + x}.$$

### Correction

On utilise :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4),$$

et

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4).$$

Produit :

$$f(x) = \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) (1 - x + x^2 - x^3 + x^4) + o(x^4).$$

Après calcul :

$$f(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4).$$

### Exercice 8

Déterminer un équivalent en 0 de

$$\sqrt{1+x} - e^{x/2}.$$

### Correction

On développe :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2),$$

et

$$e^{x/2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

Différence :

$$\sqrt{1+x} - e^{x/2} = -\frac{x^2}{4} + o(x^2).$$

Donc :

$$\sqrt{1+x} - e^{x/2} \sim -\frac{x^2}{4}.$$

## 6 Problèmes de synthèse

### Exercice 9

Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que

$$\frac{\sin x}{x} = 1 + ax^2 + bx^4 + o(x^4).$$

### Correction

On utilise :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

Donc :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

Ainsi :

$$a = -\frac{1}{6}, \quad b = \frac{1}{120}.$$

## Exercice 10

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de

$$f(x) = \arctan x.$$

### Correction

On sait que

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Or

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^3).$$

On intègre terme à terme :

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Donc :

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).}$$

## Conseils méthodologiques

- Toujours identifier l'ordre nécessaire avant de commencer les calculs.
- Lors d'un produit, ne conserver que les termes utiles.
- Pour une composition, commencer par développer l'expression intérieure.
- Utiliser systématiquement les notations  $o(x^n)$  pour contrôler la précision.
- Vérifier les résultats avec la parité éventuelle des fonctions.