

# Fonctions de plusieurs variables

## Exercices corrigés – Niveau Math Sup

### Table des matières

1	Domaine de définition et courbes de niveau	1
2	Limites	1
3	Continuité	2
4	Dérivées partielles	3
5	Plan tangent	3
6	Recherche d'extrema	4
7	Dérivées directionnelles	4
8	Exercice de synthèse	5

## 1 Domaine de définition et courbes de niveau

### Exercice 1

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

a)  $f(x, y) = \ln(x^2 - y)$

b)  $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

c)  $h(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$

### Correction

a) On doit avoir :

$$x^2 - y > 0$$

donc

$$y < x^2.$$

Le domaine est l'ensemble des points situés strictement sous la parabole  $y = x^2$ .

b) On doit avoir :

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0$$

soit

$$x^2 + y^2 \leq 4.$$

Le domaine est le disque fermé de centre  $(0, 0)$  et de rayon 2.

c) Le dénominateur doit être non nul :

$$x^2 + y^2 - 1 \neq 0.$$

Donc

$$x^2 + y^2 \neq 1.$$

Le domaine est le plan privé du cercle unité.

## 2 Limites

### Exercice 2

Étudier la limite éventuelle :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

### Correction

On utilise les coordonnées polaires :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Alors :

$$\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{(r^2 \cos^2 \theta)(r \sin \theta)}{r^2} = r \cos^2 \theta \sin \theta.$$

Comme

$$|\cos^2 \theta \sin \theta| \leq 1,$$

on obtient :

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq r.$$

Or  $r \rightarrow 0$  lorsque  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

Donc :

$$\boxed{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0}$$

## 3 Continuité

### Exercice 3

On considère la fonction :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Étudier la continuité de  $f$  en  $(0, 0)$ .

### Correction

Étudions la fonction le long de différentes trajectoires.

**Trajectoire  $y = x$**  On obtient :

$$f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Lorsque  $x \rightarrow 0$  :

$$f(x, x) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

**Trajectoire  $y = -x$**  On obtient :

$$f(x, -x) = \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Lorsque  $x \rightarrow 0$  :

$$f(x, -x) \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Les limites étant différentes selon les chemins suivis, la limite n'existe pas.  
Donc la fonction n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

$f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

## 4 Dérivées partielles

### Exercice 4

Soit

$$f(x, y) = x^2 e^{xy} + y^3.$$

Calculer les dérivées partielles premières.

### Correction

**Dérivée par rapport à  $x$**  On dérive en considérant  $y$  constant :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^{xy} + x^2 (y e^{xy}).$$

Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy} (2x + x^2 y)$$

**Dérivée par rapport à  $y$**

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 (x e^{xy}) + 3y^2.$$

Ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 e^{xy} + 3y^2$$

## 5 Plan tangent

### Exercice 5

Déterminer l'équation du plan tangent à la surface

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

au point de coordonnées  $(1, 2, 5)$ .

**Correction**

On calcule les dérivées partielles :

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y.$$

Au point  $(1, 2)$  :

$$f_x(1, 2) = 2, \quad f_y(1, 2) = 4.$$

La formule du plan tangent est :

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Donc :

$$z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2).$$

Après simplification :

$$\boxed{z = 2x + 4y - 5}$$

**6 Recherche d'extrema****Exercice 6**

Déterminer les extrema locaux de

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y.$$

**Correction**

On calcule le gradient :

$$f_x = 2x - 2, \quad f_y = 2y - 4.$$

Les points critiques vérifient :

$$2x - 2 = 0, \quad 2y - 4 = 0.$$

Donc :

$$(x, y) = (1, 2).$$

Calculons la matrice hessienne :

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Elle est définie positive.

Le point critique est donc un minimum local strict.

Valeur du minimum :

$$f(1, 2) = 1 + 4 - 2 - 8 = -5.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Minimum local strict en } (1, 2)}$$

de valeur

$$\boxed{-5.}$$

## 7 Dérivées directionnelles

### Exercice 7

Soit

$$f(x, y) = x^2y + y^2.$$

Calculer la dérivée directionnelle en  $(1, 1)$  dans la direction du vecteur

$$u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

### Correction

Le gradient vaut :

$$\nabla f(x, y) = (2xy, x^2 + 2y).$$

En  $(1, 1)$  :

$$\nabla f(1, 1) = (2, 3).$$

La dérivée directionnelle est :

$$D_u f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot u.$$

Donc :

$$\begin{aligned} D_u f(1, 1) &= (2, 3) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{6}{5} + \frac{12}{5} = \frac{18}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{D_u f(1, 1) = \frac{18}{5}}$$

## 8 Exercice de synthèse

### Exercice 8

Soit

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

1. Déterminer les points critiques.
2. Étudier leur nature.

### Correction

#### 1. Points critiques

$$f_x = 3x^2 - 3y, \quad f_y = 3y^2 - 3x.$$

On résout :

$$x^2 = y, \quad y^2 = x.$$

En remplaçant :

$$(x^2)^2 = x$$

soit

$$x^4 = x.$$

Donc :

$$x(x^3 - 1) = 0.$$

Ainsi :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1.$$

— Si  $x = 0$ , alors  $y = 0$ .

— Si  $x = 1$ , alors  $y = 1$ .

Les points critiques sont :

$$(0, 0) \quad \text{et} \quad (1, 1).$$

**2. Nature des points critiques** Les dérivées secondes sont :

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = -3.$$

Le discriminant hessien vaut :

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2.$$

**Au point**  $(0, 0)$

$$\Delta = 0 \times 0 - 9 = -9 < 0.$$

Donc :

$$\boxed{(0, 0) \text{ est un point selle.}}$$

**Au point**  $(1, 1)$

$$\Delta = 6 \times 6 - 9 = 27 > 0$$

et

$$f_{xx}(1, 1) = 6 > 0.$$

Donc :

$$\boxed{(1, 1) \text{ est un minimum local.}}$$