Exercices d'intégration avec corrections
Niveau Mathématiques Supérieures

Table des matières

1 Intégrales immédiates et changements de variable

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 (3x^2 - 2x + 1)\, dx$$

$$I_2 = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$$

Correction

1. On primitive terme à terme :

$$\int (3x^2 - 2x + 1) dx = x^3 - x^2 + x.$$

Donc

$$I_1 = [x^3 - x^2 + x]_0^1 = 1 - 1 + 1 = 1.$$

2. On remarque que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(\ln x)^2}{2}\right) = \frac{\ln x}{x}.$$

Ainsi,

$$I_2 = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}(1^2 - 0) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2

Calculer

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\, dx.$$

Correction

On écrit

$$\sin^3(x) = \sin(x)(1 - \cos^2(x)).$$

Posons

$$u = \cos(x), \qquad du = -\sin(x)dx.$$

Lorsque $x = 0$, $u = 1$; lorsque $x = \pi/2$, $u = 0$.
Alors

$$I = \int_1^0 -(1 - u^2)du = \int_0^1 (1 - u^2)du.$$

Donc

$$I = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

2 Intégration par parties

Exercice 3

Calculer

$$I = \int_0^1 xe^x\, dx.$$

Correction

On utilise une intégration par parties :

$$u = x \Rightarrow du = dx,$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x.$$

Ainsi,

$$I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx.$$

Donc

$$I = e - (e - 1) = 1.$$

Exercice 4

Calculer

$$I = \int_0^\pi x\cos(x)\,dx.$$

Correction

Par intégration par parties :

$$u = x, \quad dv = \cos(x)dx.$$

Alors

$$du = dx, \quad v = \sin(x).$$

On obtient

$$I = [x\sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x)dx.$$

Le premier terme est nul car $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$.
Ensuite,

$$\int_0^\pi \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^\pi = 2.$$

Ainsi,

$$I = -2.$$

3 Fractions rationnelles

Exercice 5

Calculer

$$I = \int \frac{1}{x^2-1}dx.$$

Correction

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right).$$

Ainsi,

$$I = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}.$$

Donc

$$I = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$$

Finalement,

$$I = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

4 Intégrales trigonométriques

Exercice 6

Calculer

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)dx.$$

Correction

On utilise l'identité

$$2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x).$$

Donc

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(2x)dx.$$

Une primitive de $\sin(2x)$ est

$$-\frac{1}{2}\cos(2x).$$

Ainsi,

$$I = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi/2}.$$

Donc

$$I = -\frac{1}{4}(\cos(\pi) - \cos(0)) = -\frac{1}{4}(-1-1) = \frac{1}{2}.$$

5 Intégrales impropres

Exercice 7

Étudier la convergence et calculer

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx.$$

Correction

On écrit

$$I = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{1}{x^2}dx.$$

Une primitive de x^{-2} est

$$-\frac{1}{x}.$$

Donc

$$I = \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{A} = \lim_{A\to+\infty}\left(1-\frac{1}{A}\right) = 1.$$

L'intégrale converge et vaut 1.

Exercice 8

Étudier la convergence de

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx.$$

Correction

On écrit

$$I = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx.$$

Or,

$$\int_1^A \frac{1}{x} dx = \ln(A).$$

Comme

$$\lim_{A \to +\infty} \ln(A) = +\infty,$$

l'intégrale diverge.

6 Exercices de synthèse

Exercice 9

Calculer

$$I = \int_0^1 x \ln(x) dx.$$

Correction

On effectue une intégration par parties :

$$u = \ln(x), \quad dv = x dx.$$

Alors

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Ainsi,

$$I = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x dx.$$

On utilise le fait que

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln(x) = 0.$$

Le terme de bord vaut donc 0.
Ensuite,

$$I = -\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{4}.$$

Exercice 10

Calculer

$$I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx.$$

Correction

Posons

$$u = 1 + x^2, \qquad du = 2xdx.$$

Ainsi,

$$I = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}du.$$

Donc

$$I = \frac{1}{2}[\ln(u)]_1^2 = \frac{1}{2}\ln(2).$$