Exercices corrigés

Limites, continuité, dérivabilité

Table des matières

1 Limites **1**
- 1.1 Exercice 1 . . . 1
- 1.2 Exercice 2 . . . 1
- 1.3 Exercice 3 . . . 2

2 Continuité **2**
- 2.1 Exercice 4 . . . 2
- 2.2 Exercice 5 . . . 3
- 2.3 Exercice 6 . . . 3

3 Dérivabilité **4**
- 3.1 Exercice 7 . . . 4
- 3.2 Exercice 8 . . . 4
- 3.3 Exercice 9 . . . 5

4 Exercices de synthèse **5**
- 4.1 Exercice 10 . . . 5

1 Limites

1.1 Exercice 1

Étudier la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right).$$

Correction

On rationalise :

$$\sqrt{x^2+3x}-x=\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}.$$

Ainsi,

$$\sqrt{x^2+3x}-x=\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}.$$

On factorise par x au dénominateur :

$$\frac{3x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}}+x}=\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}.$$

Quand $x \to +\infty$,

$$\frac{3}{x} \to 0,$$

donc

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x \right) = \frac{3}{2}.$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x \right) = \frac{3}{2}}$$

1.2 Exercice 2

Calculer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

Correction

On utilise le développement limité de l'exponentielle au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Donc :

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Ainsi,

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1).$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

1.3 Exercice 3

Déterminer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{x^2}.$$

Correction

On utilise :

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Alors :

$$\ln(1 + x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Donc

$$\frac{\ln(1 + x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1).$$

Finalement,

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}}$$

2 Continuité

2.1 Exercice 4

On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Correction

La fonction est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ comme quotient de fonctions continues avec dénominateur non nul.

Il reste à étudier la continuité en 0.

On sait que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Or

$$f(0) = 1.$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$$

La fonction est donc continue en 0.

Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

2.2 Exercice 5

Étudier la continuité de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Correction

Pour $x \neq 1$:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1.$$

Donc :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2.$$

Mais la fonction n'est pas définie en $x = 1$.

Ainsi, f n'est pas continue en 1.

Il s'agit d'une discontinuité amovible.

$$\boxed{f \text{ n'est pas continue en } 1}$$

2.3 Exercice 6

Soit

$$f(x) = |x|.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction

On écrit :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Les deux expressions sont continues.
Vérifions en 0 :

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} |x| = 0.$$

Et :

$$f(0) = 0.$$

Donc :

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0).$$

Ainsi,

$$\boxed{|x| \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

3 Dérivabilité

3.1 Exercice 7

Étudier la dérivabilité de la fonction

$$f(x) = |x|$$

en 0.

Correction

Pour $x > 0$:

$$f(x) = x, \qquad f'(x) = 1.$$

Pour $x < 0$:

$$f(x) = -x, \qquad f'(x) = -1.$$

Calculons les dérivées à droite et à gauche en 0 :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

Et :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Les deux limites étant différentes, f n'est pas dérivable en 0.

$$\boxed{|x| \text{ n'est pas dérivable en } 0}$$

3.2 Exercice 8

Déterminer les points de dérivabilité de

$$f(x) = x^{1/3}.$$

Correction

Pour $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

Étudions en 0 :

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^{1/3}}{h} = \frac{1}{h^{2/3}}.$$

Quand $h \to 0$:

$$\frac{1}{h^{2/3}} \to +\infty.$$

La limite n'est pas finie.
Donc la fonction n'est pas dérivable en 0.

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

3.3 Exercice 9

Soit

$$f(x) = x \sin x.$$

Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f sur $[0, \pi]$.

Correction

On dérive par produit :

$$f'(x) = \sin x + x \cos x.$$

Les variations dépendent du signe de

$$\sin x + x \cos x.$$

On remarque :

$$f'(0) = 0, \qquad f'(\pi) = -\pi < 0.$$

L'équation

$$\sin x + x \cos x = 0$$

admet une unique solution sur $]0, \pi[$.

Ainsi :

- f est croissante puis décroissante ;
- elle admet un maximum sur $[0, \pi]$.

4 Exercices de synthèse

4.1 Exercice 10

Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue en 0.

b) Étudier la dérivabilité en 0.

Correction

a) Continuité On utilise :

$$|\sin(1/x)| \leq 1.$$

Donc :

$$|x^2 \sin(1/x)| \leq x^2.$$

Or :

$$x^2 \to 0.$$

Par encadrement :

$$x^2 \sin(1/x) \to 0 = f(0).$$

Donc f est continue en 0.

b) Dérivabilité Calculons :

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = h \sin(1/h).$$

Or :

$$|h \sin(1/h)| \leq |h|.$$

Comme $|h| \to 0$, on obtient :

$$h \sin(1/h) \to 0.$$

Donc f est dérivable en 0 et :

$$f'(0) = 0.$$

$$\boxed{f \text{ est continue et dérivable en } 0}$$

Conseils de travail

- Maîtriser les limites usuelles et les développements limités classiques.
- Toujours vérifier :
  - le domaine de définition ;
  - les limites aux bornes ;
  - les raccords pour les fonctions définies par morceaux.
- Pour la dérivabilité :
  - revenir systématiquement au taux d'accroissement ;
  - comparer dérivée à gauche et dérivée à droite.