Exercices corrigés — Suites et séries
Niveau Mathématiques Supérieures

Table des matières

1 Suites

1.1 Étude de convergence

Exercice 1

On considère la suite définie par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right), \qquad u_0 > 0.$$

1. Montrer que la suite est bien définie et strictement positive.
2. Montrer que si $u_0 \geq \sqrt{2}$, alors (u_n) est décroissante et minorée.
3. Déterminer la limite de (u_n).

Correction. *Soit*

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Pour tout $x > 0$, on a $f(x) > 0$, donc la suite reste strictement positive.
Montrons ensuite que

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}u_n}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geq 0.$$

Ainsi, si $u_0 \geq \sqrt{2}$, alors par récurrence,

$$u_n \geq \sqrt{2}.$$

Calculons maintenant

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}.$$

Si $u_n \geq \sqrt{2}$*, alors* $u_n^2 \geq 2$*, donc*

$$u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

La suite est donc décroissante et minorée par $\sqrt{2}$ *; elle converge.*

Notons ℓ *sa limite. Par passage à la limite dans la relation de récurrence,*

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right).$$

On obtient

$$2\ell = \ell + \frac{2}{\ell} \quad \Longrightarrow \quad \ell^2 = 2.$$

Comme $\ell > 0$*, on conclut*

$$\boxed{\ell = \sqrt{2}}.$$

Exercice 2

Étudier la convergence de la suite

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Correction. *On remarque la décomposition :*

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Ainsi,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

La somme est télescopique :

$$u_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 1}.$$

Exercice 3

Soit

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1. Montrer que la suite est croissante.
2. Montrer qu'elle est majorée.
3. Déterminer sa limite.

Correction. *La suite définissant l'exponentielle classique est connue.*

On peut montrer que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

La suite est donc croissante.

Par ailleurs, en utilisant l'inégalité

$$1 + x \leq e^x,$$

on obtient

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e.$$

La suite est donc majorée.

Elle converge vers le nombre

$$\boxed{e}.$$

2 Séries numériques

2.1 Critères de convergence

Exercice 4

Étudier la nature de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}.$$

Correction. *On écrit*

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

La série est télescopique.

La somme partielle vaut

$$S_N = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Ainsi,

$$\lim_{N\to\infty} S_N = 1.$$

Donc la série converge et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1}.$$

Exercice 5

Étudier la nature de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

selon les valeurs du réel α.

Correction. *Il s'agit de la série de Riemann.*

— *Si $\alpha > 1$, la série converge.*

— *Si $\alpha \leq 1$, la série diverge.*

En particulier :

$$\sum \frac{1}{n}$$

diverge (série harmonique), tandis que

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge.

Exercice 6

Étudier la convergence de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Correction. *Il s'agit d'une série alternée.*

Posons

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

La suite (a_n) *est décroissante, positive et tend vers* 0.

D'après le critère spécial des séries alternées, la série converge.

Cependant,

$$\sum \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$$

diverge.

La convergence est donc semi-convergente.

De plus,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2).$$

2.2 Comparaison et équivalents

Exercice 7

Étudier la nature de

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Correction. *Considérons la fonction*

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}.$$

La fonction est positive et décroissante sur $[2, +\infty[$.

On applique le critère intégral :

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t} = [\ln(\ln t)]_2^{+\infty}.$$

Cette intégrale diverge.

Par conséquent,

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \text{ diverge.}}$$

Exercice 8

Étudier la nature de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}.$$

Correction. *Lorsque* $n \to +\infty$,

$$\frac{n}{n^3+1} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Or la série de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge.

Par le critère d'équivalence,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} \text{ converge.}}$$

3 Exercices de synthèse

Exercice 9

Soit la suite définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}.$$

1. Montrer que la suite est majorée par 2.
2. Montrer qu'elle est croissante.
3. Déterminer sa limite.

Correction. *Montrons par récurrence que* $u_n \leq 2$.

Initialement, $u_0 = 1 \leq 2$.

Supposons $u_n \leq 2$. *Alors*

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \leq \sqrt{4} = 2.$$

Ainsi, la suite est majorée par 2.

Étudions la croissance :

$$u_{n+1} \geq u_n \iff 2 + u_n \geq u_n^2.$$

Or

$$u_n^2 - u_n - 2 = (u_n - 2)(u_n + 1).$$

Comme $u_n \leq 2$ *et* $u_n + 1 > 0$,

$$u_n^2 - u_n - 2 \leq 0,$$

donc

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

La suite est croissante et majorée : elle converge.

Notons ℓ *sa limite.*

Par passage à la limite,

$$\ell = \sqrt{2+\ell}.$$

Donc

$$\ell^2 - \ell - 2 = 0.$$

Les solutions sont 2 *et* -1. *Comme* $u_n > 0$,

$$\boxed{\ell = 2}.$$

Exercice 10

Déterminer la nature de la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}.$$

Correction. *Pour tout* $\varepsilon > 0$,
$$\ln(n) = o(n^{\varepsilon}).$$
Prenons par exemple $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Alors
$$\frac{\ln(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Or la série de Riemann
$$\sum \frac{1}{n^{3/2}}$$
converge.

Par comparaison,
$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} \text{ \textit{converge.}}}$$