

Groupes, Anneaux et Corps

1 Les groupes

1.1 Définition

Un **groupe** est un ensemble G muni d'une loi de composition interne notée $*$ telle que :

1. **Associativité :**

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

2. **Existence d'un élément neutre :**

Il existe un élément $e \in G$ tel que

$$e * a = a * e = a$$

pour tout $a \in G$.

3. **Existence d'un inverse :**

Pour tout $a \in G$, il existe $a^{-1} \in G$ tel que

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

Si de plus

$$a * b = b * a$$

pour tous $a, b \in G$, alors le groupe est dit **commutatif** ou **abélien**.

1.2 Exemples

- $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien.
- $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe non commutatif.

2 Les anneaux

2.1 Définition

Un **anneau** est un ensemble A muni de deux lois internes :

$$+ \quad \text{et} \quad \times$$

vérifiant les propriétés suivantes.

Pour l'addition

$(A, +)$ est un groupe commutatif.

Pour la multiplication

1. Associativité :

$$(ab)c = a(bc)$$

2. Distributivité :

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)c = ac + bc$$

Si :

$$ab = ba$$

pour tous $a, b \in A$, l'anneau est dit **commutatif**.

S'il existe un élément $1 \in A$ tel que

$$1a = a1 = a$$

pour tout $a \in A$, alors l'anneau est dit **unitaire**.

2.2 Exemples

- $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.
- $M_n(\mathbb{R})$ est un anneau non commutatif.

3 Les corps

3.1 Définition

Un **corps** est un anneau commutatif unitaire dans lequel tout élément non nul possède un inverse multiplicatif.

Autrement dit :

$$K^\times = K \setminus \{0\}$$

forme un groupe pour la multiplication.

Cela signifie que pour tout $a \neq 0$, il existe a^{-1} tel que

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

3.2 Exemples

- \mathbb{Q} est un corps.
- \mathbb{R} est un corps.
- \mathbb{C} est un corps.

En revanche, \mathbb{Z} n'est pas un corps car certains éléments non nuls ne possèdent pas d'inverse dans \mathbb{Z} .

4 Hiérarchie des structures

On a les inclusions suivantes :

$$\text{Corps} \subset \text{Anneaux} \subset \text{Groupes}$$

Un corps est donc un type particulier d'anneau, et un anneau possède naturellement une structure de groupe pour l'addition.

5 Tableau récapitulatif

Structure	Opérations	Propriétés essentielles
Groupe	*	Associativité, neutre, inverse
Anneau	+, ×	Groupe additif + distributivité
Corps	+, ×	Anneau commutatif + division