Cours de Dénombrement

Niveau Mathématiques Supérieures

Table des matières

1 Introduction

Le dénombrement étudie les méthodes permettant de compter des objets sans les énumérer un à un.

Il intervient en :

- probabilités ;
- algèbre ;
- informatique théorique ;
- théorie des graphes ;
- analyse combinatoire.

2 Principes fondamentaux

2.1 Principe additif

Si deux ensembles disjoints A et B contiennent respectivement a et b éléments, alors :

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Plus généralement :

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

lorsque les ensembles sont deux à deux disjoints.

Exemple

Un étudiant choisit :

- soit une option parmi 4 ;
- soit une autre option parmi 3.

Le nombre total de choix est :

$$4 + 3 = 7$$

2.2 Principe multiplicatif

Si une expérience se déroule en plusieurs étapes indépendantes :

- première étape : a choix ;
- seconde étape : b choix ;

alors le nombre total de possibilités est :

$$ab$$

Exemple

Former un code :

- 3 lettres ;
- puis 2 chiffres.

Nombre total :

$$26^3 \times 10^2$$

3 Factorielle

3.1 Définition

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

et :

$$0! = 1$$

3.2 Valeurs usuelles

$$1! = 1, \qquad 2! = 2, \qquad 3! = 6, \qquad 4! = 24, \qquad 5! = 120$$

4 Permutations

4.1 Permutations simples

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est :

$$n!$$

4.2 Démonstration

- premier choix : n possibilités ;
- deuxième choix : $n - 1$;
- etc.

Donc :

$$n(n-1)\cdots 1 = n!$$

Exemple

Nombre d'anagrammes de `MATH` :

$$4! = 24$$

4.3 Permutations avec répétitions

Si certains objets sont identiques :

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

où n_i désigne le nombre d'occurrences du i-ème objet.

Exemple

Mot `MAMAN` :

- 5 lettres ;
- 2 lettres M ;
- 2 lettres A.

Nombre d'anagrammes :

$$\frac{5!}{2!2!} = 30$$

5 Arrangements

5.1 Définition

On choisit p éléments parmi n en tenant compte de l'ordre.
Le nombre d'arrangements est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple

Podium de 3 personnes parmi 10 :

$$A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

6 Combinaisons

6.1 Définition

On choisit p éléments parmi n sans tenir compte de l'ordre.
Le nombre de combinaisons est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

6.2 Lien avec les arrangements

$$A_n^p = p!\binom{n}{p}$$

Exemple

Choisir 5 étudiants parmi 20 :

$$\binom{20}{5} = 15504$$

7 Triangle de Pascal

Les coefficients binomiaux vérifient :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

7.1 Interprétation combinatoire

On fixe un élément x.
Pour former un sous-ensemble de taille p :

— soit il contient x ;

— soit il ne le contient pas.

D'où la relation précédente.

8 Binôme de Newton

Pour tout entier $n \geq 0$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Exemple

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

9 Méthodes de dénombrement

9.1 Questions essentielles

Avant tout calcul :

1. L'ordre compte-t-il ?
2. Les répétitions sont-elles autorisées ?
3. Existe-t-il des contraintes ?

9.2 Exemple

Combien existe-t-il de nombres à 5 chiffres distincts ?

- premier chiffre : 9 choix ;
- deuxième : 9 ;
- troisième : 8 ;
- quatrième : 7 ;
- cinquième : 6.

Donc :

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$$

10 Principe des tiroirs

10.1 Énoncé

Si $n+1$ objets sont répartis dans n boîtes, alors une boîte contient au moins deux objets.

Exemple

Dans un groupe de 13 personnes, au moins deux sont nées le même mois.

11 Inclusion-exclusion

11.1 Deux ensembles

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

11.2 Trois ensembles

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

12 Double comptage

On compte le même ensemble de deux manières différentes.

Exemple

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

12.1 Interprétation

- membre de gauche : nombre de sous-ensembles classés par taille ;
- membre de droite : chaque élément est choisi ou non.

13 Exercices classiques

13.1 Niveau 1

1. Nombre d'anagrammes de `BANANE`.
2. Nombre de mains de 5 cartes.
3. Nombre de codes PIN.

13.2 Niveau 2

1. Nombre de chemins dans une grille.
2. Dénombrement avec contraintes d'adjacence.
3. Tirages avec répétitions.

13.3 Niveau 3

1. Dérangements.
2. Double comptage.
3. Identités combinatoires.

14 Erreurs classiques

— Confondre arrangements et combinaisons ;
— oublier les répétitions ;
— compter plusieurs fois le même objet ;
— appliquer une formule sans analyser le problème.

15 Formulaire

$$n!$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

16 Conclusion

Le dénombrement repose moins sur les formules que sur l'analyse correcte de la structure d'un problème.

Les compétences essentielles sont :

— reconnaître si l'ordre intervient ;

— identifier les répétitions ;

— modéliser les contraintes ;

— éviter les doubles comptages.