

Exercices corrigés de dénombrement

Niveau Math Sup

Exercice 1 — Anagrammes

Combien le mot

STATISTIQUES

possède-t-il d'anagrammes distinctes ?

Correction

Le mot contient 12 lettres avec répétitions :

- S : 3 fois ;
- T : 3 fois ;
- I : 2 fois ;
- les autres lettres sont uniques.

Le nombre d'anagrammes est donc :

$$\frac{12!}{3!3!2!}$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{12!}{3!3!2!} = 6\,652\,800}$$

Exercice 2 — Suites binaires sans deux 1 consécutifs

Déterminer le nombre u_n de suites de longueur n formées de 0 et 1 sans deux 1 consécutifs.

Correction

On note u_n ce nombre.

- Si la suite commence par 0, il reste une suite admissible de longueur $n - 1$, soit u_{n-1} possibilités.
- Si elle commence par 1, le terme suivant doit être 0. Il reste alors une suite admissible de longueur $n - 2$, soit u_{n-2} possibilités.

Donc :

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Conditions initiales :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2.$$

On reconnaît la suite de Fibonacci :

$$\boxed{u_n = F_{n+2}}$$

Exercice 3 — Comités

Dans une classe de 15 étudiants, on choisit :

- un président ;
- un secrétaire ;
- puis un comité de 4 personnes parmi les autres étudiants.

Combien y a-t-il de possibilités ?

Correction

15 choix pour le président

14 choix pour le secrétaire

$\binom{13}{4}$ choix pour le comité

Ainsi :

$$15 \times 14 \times \binom{13}{4}.$$

Or :

$$\binom{13}{4} = 715.$$

Donc :

$$\boxed{150\,150}.$$

Exercice 4 — Boules et urnes

On place 10 boules indiscernables dans 4 urnes distinctes.

Combien y a-t-il de répartitions avec au moins une boule dans chaque urne ?

Correction

On cherche les solutions entières strictement positives de :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10.$$

Posons :

$$y_i = x_i - 1.$$

Alors :

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6$$

avec $y_i \geq 0$.

Par la méthode des étoiles et barres :

$$\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3}.$$

Donc :

$$\boxed{84}.$$

Exercice 5 — Inclusion-exclusion

Combien d'entiers entre 1 et 500 sont divisibles par 2 ou 3 ?

Correction

Soient :

$$A = \{\text{multiples de } 2\}, \quad B = \{\text{multiples de } 3\}.$$

Alors :

$$|A| = \left\lfloor \frac{500}{2} \right\rfloor = 250,$$

$$|B| = \left\lfloor \frac{500}{3} \right\rfloor = 166,$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{500}{6} \right\rfloor = 83.$$

Par inclusion-exclusion :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Donc :

$$250 + 166 - 83 = 333.$$

Ainsi :

$$\boxed{333}.$$

Exercice 6 — Dérangements

On appelle dérangement une permutation sans point fixe.

Déterminer le nombre de dérangements de $\{1, 2, 3, 4\}$.

Correction

Le nombre total de permutations est :

$$4! = 24.$$

On applique le principe d'inclusion-exclusion.

Soit A_i l'ensemble des permutations fixant i .

$$|A_i| = 3! = 6.$$

Il y a 4 ensembles A_i , donc :

$$\sum |A_i| = 24.$$

Intersections doubles :

$$|A_i \cap A_j| = 2! = 2.$$

Il y en a :

$$\binom{4}{2} = 6,$$

donc contribution :

$$12.$$

Intersections triples :

4.

Intersection quadruple :

1.

Ainsi :

$$d_4 = 24 - 24 + 12 - 4 + 1.$$

Donc :

$$\boxed{d_4 = 9}.$$

Exercice 7 — Table ronde

De combien de façons 7 personnes peuvent-elles s'asseoir autour d'une table ronde ?

Correction

Deux dispositions obtenues par rotation sont identiques.

On fixe donc une personne.

Il reste :

6!

permutations possibles.

Donc :

$$\boxed{720}.$$

Exercice 8 — Double comptage

Montrer que

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Correction

On compte les couples (A, x) où :

- $A \subset \{1, \dots, n\}$,
- $x \in A$.

Premier comptage

Si $|A| = k$, alors :

- on choisit A de $\binom{n}{k}$ façons ;
- puis $x \in A$ de k façons.

Donc :

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$$

Second comptage

On choisit d'abord x :

n choix.

Puis chaque autre élément peut :

— appartenir à A ,

— ou non.

Donc :

$$2^{n-1}$$

possibilités.

Ainsi :

$$n2^{n-1}.$$

On obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}}.$$

Exercice 9 — Chemins sur une grille

Combien existe-t-il de chemins allant de $(0, 0)$ à $(5, 3)$ en ne se déplaçant que vers la droite ou vers le haut ?

Correction

Il faut effectuer :

— 5 déplacements vers la droite ;

— 3 déplacements vers le haut.

Chaque chemin correspond donc à une suite de 8 mouvements contenant :

$$5D \text{ et } 3H.$$

Le nombre de chemins est :

$$\binom{8}{3}.$$

Ainsi :

$$\boxed{56}.$$

Exercice 10 — Couples de sous-ensembles

Soit E un ensemble à n éléments.

Combien existe-t-il de couples (A, B) tels que

$$A \subseteq B \subseteq E?$$

Correction

Pour chaque élément $x \in E$, trois situations sont possibles :

1. $x \notin B$,
2. $x \in B \setminus A$,
3. $x \in A$.

Chaque élément possède donc 3 statuts indépendants.

Ainsi :

$$\boxed{3^n}.$$