

# Exercices corrigés de probabilités

## Variables aléatoires – Niveau Math sup

### Exercice 1 – Somme de deux dés

On lance deux dés équilibrés à 6 faces.

On note  $X$  la somme des deux résultats.

1. Déterminer la loi de  $X$ .
2. Calculer  $\mathbb{E}(X)$ .
3. Calculer  $\text{Var}(X)$ .

### Correction

Les valeurs possibles de  $X$  sont :

$$X(\Omega) = \{2, 3, \dots, 12\}$$

Il y a 36 issues équiprobables.

$k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
effectif	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Donc :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\text{effectif}}{36}$$

Par linéarité de l'espérance :

$$X = D_1 + D_2$$

avec  $D_1$  et  $D_2$  indépendantes et uniformes sur  $\{1, \dots, 6\}$ .

Comme :

$$\mathbb{E}(D_i) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{7}{2}$$

on obtient :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 7}$$

Pour la variance :

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(D_1) + \text{Var}(D_2)$$

et :

$$\text{Var}(D_i) = \frac{35}{12}$$

Donc :

$$\text{Var}(X) = \frac{35}{6}$$

## Exercice 2 – Loi géométrique

On répète des lancers d'une pièce équilibrée jusqu'à obtenir le premier Pile.  
On note  $X$  le rang d'apparition du premier Pile.

1. Déterminer la loi de  $X$ .
2. Calculer  $\mathbb{E}(X)$ .
3. Calculer  $\text{Var}(X)$ .

### Correction

Pour obtenir le premier Pile au rang  $k$  :

- les  $k - 1$  premiers lancers doivent être Face ;
- le  $k$ -ième doit être Pile.

Donc :

$$\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

pour  $k \geq 1$ .

$X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p = \frac{1}{2}$ .

Ainsi :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} = 2$$

et :

$$\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2} = 2$$

## Exercice 3 – Fonction d'une variable aléatoire

On considère une variable aléatoire  $X$  telle que :

$$\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}$$

On pose :

$$Y = X^2$$

1. Déterminer la loi de  $Y$ .
2. Calculer  $\mathbb{E}(Y)$ .

## Correction

Les valeurs possibles de  $Y$  sont :

$$Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$$

avec :

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(Y = 4) = \frac{1}{4}$$

Donc :

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4}$$

et finalement :

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{5}{4}}$$

## Exercice 4 – Loi binomiale

Une machine produit une pièce défectueuse avec probabilité 0,02.

On prélève 100 pièces indépendamment.

On note  $X$  le nombre de pièces défectueuses.

1. Identifier la loi de  $X$ .
2. Calculer  $\mathbb{E}(X)$ .
3. Calculer  $\text{Var}(X)$ .
4. Calculer  $\mathbb{P}(X = 0)$ .

## Correction

Chaque pièce correspond à une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p = 0,02$ .

Donc :

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(100, 0,02)}$$

On utilise les formules classiques :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = np = 2}$$

$$\boxed{\text{Var}(X) = np(1 - p) = 1,96}$$

Enfin :

$$\boxed{\mathbb{P}(X = 0) = 0,98^{100}}$$

## Exercice 5 – Calcul direct d’espérance et variance

On considère une variable aléatoire  $X$  définie par :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{10} \quad \text{pour } k \in \{1, 2, 3, 4\}$$

1. Vérifier qu’il s’agit bien d’une loi de probabilité.
2. Calculer  $\mathbb{E}(X)$ .
3. Calculer  $\text{Var}(X)$ .

### Correction

On vérifie :

$$\sum_{k=1}^4 \frac{k}{10} = \frac{1 + 2 + 3 + 4}{10} = 1$$

Donc il s’agit bien d’une loi de probabilité.

Ensuite :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^4 k \cdot \frac{k}{10} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{10} = 3$$

Puis :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^4 k^2 \cdot \frac{k}{10} = \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3}{10} = 10$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1}$$

## Formules à connaître

### Loi binomiale

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = np}$$

$$\boxed{\text{Var}(X) = np(1 - p)}$$

### Loi géométrique

$$X \sim \mathcal{G}(p)$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}}$$

$$\boxed{\text{Var}(X) = \frac{1 - p}{p^2}}$$

## Variance

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$