Cours de Probabilités
Espérance et Variance

Niveau Mathématiques Supérieures

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Espérance **1**
2.1 Définition dans le cas discret 1
2.2 Interprétation 1
2.3 Exemple : lancer d'un dé équilibré 1

3 Propriétés de l'espérance **2**
3.1 Linéarité 2
3.2 Espérance d'une fonction 2

4 Variance **2**
4.1 Définition 2
4.2 Interprétation 2

5 Formule pratique de la variance **2**
5.1 Exemple du dé équilibré 3

6 Écart-type **3**

7 Propriétés fondamentales **3**
7.1 Translation 3
7.2 Homogénéité 3
7.3 Variance d'une somme 3

8 Lois usuelles **4**
8.1 Loi de Bernoulli 4
8.2 Loi binomiale 4
8.3 Loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$ 4

9 Méthodes de calcul **4**
9.1 Calcul d'une espérance 4
9.2 Calcul d'une variance 4

10 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev **5**

11 Pièges classiques **5**

12 Exercice classique **5**

13 Conclusion **5**

1 Introduction

En probabilités, une variable aléatoire permet de modéliser numériquement une expérience aléatoire.

Deux notions fondamentales sont :

— l'espérance, qui mesure la valeur moyenne théorique ;

— la variance, qui mesure la dispersion autour de cette moyenne.

2 Espérance

2.1 Définition dans le cas discret

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec probabilités associées $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

On suppose :

$$p_i \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

L'espérance de X est définie par :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$$

C'est une moyenne pondérée des valeurs possibles.

2.2 Interprétation

L'espérance représente la moyenne observée lorsque l'on répète l'expérience un très grand nombre de fois.

2.3 Exemple : lancer d'un dé équilibré

Soit X le résultat d'un lancer de dé équilibré.

Alors :

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

et :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6}$$

On obtient :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$$

L'espérance n'est pas forcément une valeur prise par la variable.

3 Propriétés de l'espérance

3.1 Linéarité

Pour toutes variables aléatoires X, Y et tous réels a, b :

$$\boxed{\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)}$$

Cette propriété est valable même si X et Y ne sont pas indépendantes.

3.2 Espérance d'une fonction

Si $Y = g(X)$, alors :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_x g(x)\mathbb{P}(X = x)$$

4 Variance

4.1 Définition

La variance mesure l'écart quadratique moyen à l'espérance.

$$\boxed{V(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)}$$

On note également :

$$V(X) = \mathrm{Var}(X)$$

4.2 Interprétation

- petite variance : valeurs concentrées ;
- grande variance : valeurs dispersées.

On a toujours :

$$V(X) \geq 0$$

et :

$$V(X) = 0 \iff X \text{ est constante.}$$

5 Formule pratique de la variance

La formule la plus utilisée est :

$$\boxed{V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$

5.1 Exemple du dé équilibré

On sait déjà :

$$\mathbb{E}(X) = 3,5$$

Calculons :

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{6} = \frac{91}{6}$$

Donc :

$$V(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

6 Écart-type

L'écart-type est défini par :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

Il permet de mesurer la dispersion dans la même unité que X.

7 Propriétés fondamentales

7.1 Translation

Pour tout réel a :

$$V(X + a) = V(X)$$

7.2 Homogénéité

Pour tout réel a :

$$\boxed{V(aX) = a^2 V(X)}$$

7.3 Variance d'une somme

Si X et Y sont indépendantes :

$$\boxed{V(X + Y) = V(X) + V(Y)}$$

Plus généralement :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$$

8 Lois usuelles

8.1 Loi de Bernoulli

Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } p \\ 0 & \text{avec probabilité } 1-p \end{cases}$$

Alors :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = p}$$

et :

$$\boxed{V(X) = p(1-p)}$$

8.2 Loi binomiale

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
Alors :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = np}$$

et :

$$\boxed{V(X) = np(1-p)}$$

8.3 Loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$

Alors :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}}$$

et :

$$\boxed{V(X) = \frac{n^2-1}{12}}$$

9 Méthodes de calcul

9.1 Calcul d'une espérance

1) Déterminer les valeurs possibles ;
2) déterminer les probabilités ;
3) appliquer la formule de définition.

9.2 Calcul d'une variance

Méthode recommandée :

1) Calculer $\mathbb{E}(X)$;
2) calculer $\mathbb{E}(X^2)$;
3) utiliser :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

10 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Pour tout réel $a > 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}}$$

Cette inégalité contrôle la dispersion des valeurs autour de la moyenne.

11 Pièges classiques

— Confondre :

$$\mathbb{E}(X^2) \neq \mathbb{E}(X)^2$$

— Oublier le carré dans :

$$V(aX) = a^2 V(X)$$

— Utiliser :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

sans indépendance.

12 Exercice classique

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

1. Écrire X comme somme de variables de Bernoulli indépendantes.
2. Retrouver :

$$\mathbb{E}(X) = np$$

et :

$$V(X) = np(1 - p)$$

13 Conclusion

Les notions d'espérance et de variance sont fondamentales en probabilités.
Il faut maîtriser :

— les définitions ;

— les propriétés de linéarité ;

— les formules usuelles ;

— les calculs sur les lois classiques.

Ces notions interviennent dans toute la suite du programme : variables aléatoires discrètes, lois usuelles, convergence, statistiques et probabilités avancées.