Cours — Lois usuelles en probabilités

Niveau Mathématiques Supérieures

Table des matières

1 Variables aléatoires : cadre général

Une **variable aléatoire** associe un réel à chaque issue d'une expérience aléatoire.
On distingue :

— les variables aléatoires discrètes ;

— les variables aléatoires continues.

2 Lois discrètes usuelles

2.1 Loi de Bernoulli

Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si :

$$P(X = 1) = p \qquad \text{et} \qquad P(X = 0) = 1 - p$$

On note :

$$X \sim \mathcal{B}(p)$$

Espérance et variance

$$E(X) = p$$

$$V(X) = p(1 - p)$$

Interprétation

Une épreuve à deux issues :

- succès avec probabilité p ;
- échec avec probabilité $1 - p$.

2.2 Loi binomiale

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) si elle compte le nombre de succès dans n épreuves de Bernoulli indépendantes.

On note :

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Pour $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Espérance et variance

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1 - p)$$

Exemple

Nombre de bonnes réponses à un QCM.

2.3 Loi géométrique

La loi géométrique modélise le rang du premier succès.

On note :

$$X \sim \mathcal{G}(p)$$

avec :

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p \qquad (k \geq 1)$$

Espérance et variance

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Propriété fondamentale

La loi géométrique possède la propriété d'absence de mémoire :

$$P(X > m + n \mid X > m) = P(X > n)$$

2.4 Loi de Poisson

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si :

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

On note :

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

Espérance et variance

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

Applications

- nombre d'appels téléphoniques ;
- désintégrations radioactives ;
- nombre de défauts sur une surface.

Approximation de la binomiale

Si :

$$n \to +\infty, \qquad p \to 0, \qquad np \to \lambda$$

alors :

$$\mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{P}(\lambda)$$

3 Lois continues usuelles

3.1 Densité

Une variable aléatoire continue admet une densité f telle que :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

avec :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

La fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

3.2 Loi uniforme

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a, b]$ si sa densité vaut :

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad (x \in [a, b])$$

On note :

$$X \sim \mathcal{U}([a, b])$$

Espérance et variance

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3.3 Loi exponentielle

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité est :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad (x \geq 0)$$

On note :

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

Fonction de répartition

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Espérance et variance

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Propriété fondamentale

La loi exponentielle possède la propriété d'absence de mémoire :

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

3.4 Loi normale

Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres (μ, σ^2) si sa densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

On note :

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Espérance et variance

$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2$$

Loi normale centrée réduite

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Si :

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

alors :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Valeurs classiques

$$P(|Z| \leq 1) \approx 0.68$$

$$P(|Z| \leq 2) \approx 0.95$$

$$P(|Z| \leq 3) \approx 0.997$$

4 Résultats fondamentaux

4.1 Indépendance

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si :

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Conséquences :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

et :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

si X et Y sont indépendantes.

4.2 Sommes de variables aléatoires

Binomiales

Si :

$$X \sim \mathcal{B}(n, p) \quad \text{et} \quad Y \sim \mathcal{B}(m, p)$$

indépendantes, alors :

$$X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$$

Poisson

Si :

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda) \quad \text{et} \quad Y \sim \mathcal{P}(\mu)$$

indépendantes, alors :

$$X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$$

Normales

Si :

$$X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \quad \text{et} \quad Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$$

indépendantes, alors :

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

5 Théorèmes fondamentaux

5.1 Loi faible des grands nombres

Soient (X_n) des variables aléatoires indépendantes de même loi, d'espérance μ.
Alors :

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \longrightarrow \mu$$

en probabilité.

5.2 Théorème central limite

Soient (X_n) des variables aléatoires indépendantes de même loi, d'espérance μ et de variance σ^2.

Posons :

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

Alors :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

en loi.

6 Tableau récapitulatif

Loi	**Espérance**	**Variance**	**Domaine**
Bernoulli	p	$p(1-p)$	$\{0,1\}$
Binomiale	np	$np(1-p)$	$\{0,\dots,n\}$
Géométrique	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\mathbb{N}^*$
Poisson	λ	λ	$\mathbb{N}$
Uniforme	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$[a,b]$
Exponentielle	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\mathbb{R}_+$
Normale	μ	σ^2	$\mathbb{R}$

7 Méthodologie

Reconnaître une loi

— **Binomiale** : nombre fixe d'essais indépendants ;
— **Géométrique** : attente du premier succès ;
— **Poisson** : événements rares ;
— **Exponentielle** : temps d'attente ;
— **Normale** : phénomènes agrégés.

8 Exercices classiques

1. Calculer une probabilité binomiale ;
2. Déterminer une espérance et une variance ;
3. Utiliser l'indépendance ;
4. Approcher une loi binomiale par une loi de Poisson ;
5. Approcher une loi binomiale par une loi normale ;
6. Utiliser le théorème central limite.

Fin du cours