

Cours de Probabilités

Les Variables Aléatoires

Niveau Mathématiques Supérieures

Table des matières

1	Introduction	3
2	Espace probabilisé	3
3	Variables aléatoires discrètes	3
3.1	Définition	3
3.2	Loi de probabilité	3
3.3	Exemple : somme de deux dés	4
4	Fonction de répartition	4
4.1	Définition	4
4.2	Propriétés	4
4.3	Exemple	4
5	Espérance	4
5.1	Définition	4
5.2	Exemple : dé équilibré	5
5.3	Linéarité	5
6	Variance et écart-type	5
6.1	Variance	5
6.2	Écart-type	5
6.3	Exemple	5
7	Lois discrètes usuelles	5
7.1	Loi de Bernoulli	5
7.2	Loi binomiale	6
7.3	Loi géométrique	6
8	Variables aléatoires continues	6
8.1	Définition	6
8.2	Densité	6
9	Loi uniforme	7
9.1	Définition	7
9.2	Espérance et variance	7
10	Loi exponentielle	7
10.1	Définition	7
10.2	Espérance et variance	7

11 Indépendance	7
11.1 Conséquences	8
12 Covariance	8
12.1 Définition	8
12.2 Variance d'une somme	8
13 Théorème central limite	8
14 Méthode pour les exercices	8
15 Pièges classiques	8
16 Exercices	9
17 Conclusion	9

1 Introduction

Les probabilités permettent de modéliser des phénomènes aléatoires.

Une **variable aléatoire** associe un nombre réel à chaque issue d'une expérience aléatoire.

Exemples :

- lancer d'un dé : nombre obtenu ;
- lancers de pièces : nombre de faces ;
- durée de vie d'un composant ;
- temps d'attente d'un client.

2 Espace probabilisé

On considère un espace probabilisé :

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

où :

- Ω est l'univers ;
- \mathcal{A} est l'ensemble des événements ;
- \mathbb{P} est la probabilité.

Une variable aléatoire réelle est une application :

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

3 Variables aléatoires discrètes

3.1 Définition

Une variable aléatoire est dite **discrète** lorsqu'elle prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs.

3.2 Loi de probabilité

Si les valeurs prises par X sont :

$$x_1, x_2, \dots$$

alors la loi de X est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$$

avec :

$$p_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_i p_i = 1$$

3.3 Exemple : somme de deux dés

On lance deux dés équilibrés.
Soit X la somme obtenue.

$$X \in \{2, 3, \dots, 12\}$$

Par exemple :

$$\mathbb{P}(X = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

car les couples donnant 7 sont :

$$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$$

4 Fonction de répartition

4.1 Définition

La fonction de répartition de X est :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

4.2 Propriétés

- F_X est croissante ;
- $0 \leq F_X(x) \leq 1$;
- F_X est continue à droite ;
-

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$$

4.3 Exemple

Supposons :

$$\mathbb{P}(X = 0) = 0.3 \quad \mathbb{P}(X = 1) = 0.7$$

Alors :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.3 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

5 Espérance

5.1 Définition

L'espérance d'une variable discrète est :

$$E(X) = \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

Elle représente la moyenne théorique.

5.2 Exemple : dé équilibré

$$E(X) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{7}{2}$$

5.3 Linéarité

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

6 Variance et écart-type

6.1 Variance

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Formule utile :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

6.2 Écart-type

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

6.3 Exemple

Pour un dé équilibré :

$$E(X) = \frac{7}{2}$$

et :

$$E(X^2) = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{6} = \frac{91}{6}$$

Donc :

$$V(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

7 Lois discrètes usuelles

7.1 Loi de Bernoulli

Une variable suit une loi de Bernoulli de paramètre p si :

$$\mathbb{P}(X = 1) = p$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

On note :

$$X \sim \mathcal{B}(p)$$

Espérance :

$$E(X) = p$$

Variance :

$$V(X) = p(1 - p)$$

7.2 Loi binomiale

Une variable suit une loi binomiale si elle compte le nombre de succès lors de n expériences de Bernoulli indépendantes.

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Sa loi est :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

pour :

$$k \in \{0, \dots, n\}$$

Espérance :

$$E(X) = np$$

Variance :

$$V(X) = np(1 - p)$$

7.3 Loi géométrique

La loi géométrique modélise le rang du premier succès.

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

pour :

$$k \geq 1$$

8 Variables aléatoires continues

8.1 Définition

Une variable aléatoire continue peut prendre une infinité non dénombrable de valeurs.

8.2 Densité

Une variable continue possède une densité f telle que :

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt$$

avec :

$$f(x) \geq 0$$

et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

9 Loi uniforme

9.1 Définition

Sur $[a, b]$:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

pour :

$$x \in [a, b]$$

9.2 Espérance et variance

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

10 Loi exponentielle

10.1 Définition

Une variable suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

pour :

$$x \geq 0$$

10.2 Espérance et variance

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

11 Indépendance

Deux variables X et Y sont indépendantes si :

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

11.1 Conséquences

Si X et Y sont indépendantes :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

et :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

12 Covariance

12.1 Définition

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Formule utile :

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

12.2 Variance d'une somme

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

13 Théorème central limite

Le théorème central limite affirme que la somme d'un grand nombre de variables indépendantes identiquement distribuées tend vers une loi normale.

Ce résultat joue un rôle fondamental en statistiques et en physique.

14 Méthode pour les exercices

1. Identifier l'expérience aléatoire ;
2. déterminer la loi adaptée ;
3. calculer les probabilités ;
4. calculer espérance et variance ;
5. vérifier la cohérence des résultats.

15 Pièges classiques

- Confondre événement et variable aléatoire ;
- oublier la normalisation ;
- utiliser la loi binomiale sans indépendance ;
- oublier les conditions sur les paramètres.

16 Exercices

Exercice 1

On lance 5 fois une pièce équilibrée.
Soit X le nombre de faces obtenues.

1. Déterminer la loi de X ;
2. calculer :

$$\mathbb{P}(X = 3)$$

3. calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 2

Une variable suit une loi exponentielle de paramètre 2.
Calculer :

$$\mathbb{P}(X > 1)$$

Exercice 3

On lance deux dés équilibrés.
Soit X le maximum obtenu.
Déterminer :

- la loi de X ;
- l'espérance de X .

17 Conclusion

Les variables aléatoires constituent l'outil central des probabilités modernes.
La maîtrise :

- des lois usuelles ;
- de l'espérance ;
- de la variance ;
- des notions d'indépendance ;

est indispensable pour la suite des études en probabilités, statistiques, physique et informatique.