Exercices corrigés
Espérance et variance

Niveau Mathématiques Supérieures

Rappels

Pour une variable aléatoire discrète X :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$$

Exercice 1 — Dé équilibré

On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X le numéro obtenu.

1) Déterminer $\mathbb{E}(X)$.
2) Déterminer $\mathrm{Var}(X)$.

Correction

Les valeurs possibles sont $1, 2, 3, 4, 5, 6$, chacune avec probabilité $\frac{1}{6}$.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

Ensuite :

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{6}$$

$$= \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$$

Donc :

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{182 - 147}{12} = \frac{35}{12}$$

Exercice 2 — Loi géométrique

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir "pile".
On note X le rang du premier "pile".

1) Donner la loi de X.
2) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Correction

X suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad (k \geq 1)$$

Pour une loi géométrique :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

et

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}(X) = 2$$

et

$$\mathrm{Var}(X) = 2$$

Exercice 3 — Loi binomiale

Une pièce équilibrée est lancée 10 fois.
On note X le nombre de "piles" obtenus.

1) Identifier la loi de X.
2) Calculer son espérance et sa variance.

Correction

X suit une loi binomiale :

$$X \sim \mathcal{B}(10, \tfrac{1}{2})$$

Pour une loi binomiale :

$$\mathbb{E}(X) = np$$

$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

Donc :

$$\mathbb{E}(X) = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

$$\mathrm{Var}(X) = 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Exercice 4 — Variable discrète

Soit X telle que :

$$\mathbb{P}(X=-1)=\frac{1}{4},\quad \mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{2},\quad \mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{4}$$

Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Correction

$$\mathbb{E}(X)=-1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

Puis :

$$\mathbb{E}(X^2)=1\times\frac{1}{4}+0+4\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$$

Donc :

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$=\frac{20-1}{16}=\frac{19}{16}$$

Exercice 5 — Variables indépendantes

Soient X et Y indépendantes avec :

$$\mathbb{E}(X)=1,\quad \mathrm{Var}(X)=2$$

$$\mathbb{E}(Y)=3,\quad \mathrm{Var}(Y)=5$$

Calculer :

1) $\mathbb{E}(2X-3Y+1)$
2) $\mathrm{Var}(2X-3Y+1)$

Correction

Par linéarité :

$$\mathbb{E}(2X-3Y+1)=2\mathbb{E}(X)-3\mathbb{E}(Y)+1$$

$$=2-9+1=-6$$

Comme X et Y sont indépendantes :

$$\mathrm{Var}(2X-3Y+1)=4\mathrm{Var}(X)+9\mathrm{Var}(Y)$$

$$=4\times 2+9\times 5=53$$

Exercice 6 — Transformation affine

Soit X telle que :

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X=1)=\frac{2}{3}$$

On pose :

$$Y=3X+2$$

Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

Correction

D'abord :

$$\mathbb{E}(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

Comme $X^2=X$:

$$\mathbb{E}(X^2)=\frac{2}{3}$$

Ainsi :

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$=\frac{6-4}{9}=\frac{2}{9}$$

Puis :

$$\mathbb{E}(Y)=3\mathbb{E}(X)+2$$

$$=3\times\frac{2}{3}+2=4$$

et

$$\mathrm{Var}(Y)=9\mathrm{Var}(X)=2$$

Exercice 7 — Variable indicatrice

On lance une pièce équilibrée n fois.
On note X le nombre de changements entre deux lancers consécutifs.
Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Correction

Pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on pose :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si les lancers } i \text{ et } i+1 \text{ diffèrent} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors :

$$X = X_1 + \cdots + X_{n-1}$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_i)$$

Or :

$$\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$$

Donc :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n-1}{2}$$

Exercices supplémentaires

1. Calculer la variance d'une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.
2. Déterminer l'espérance du minimum de deux dés.
3. Calculer l'espérance du temps d'attente du premier double-six.
4. Étudier le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire.