Exercices corrigés sur les lois usuelles

Niveau Mathématiques Supérieures

1. Loi de Bernoulli

Exercice

On lance une pièce équilibrée une fois. Soit X la variable aléatoire définie par :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Identifier la loi de X.
2) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

Correction

X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$:

$$X \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$$

On sait que pour une loi de Bernoulli :

$$\mathbb{E}(X) = p \qquad \text{et} \qquad V(X) = p(1-p)$$

Donc :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$$

et

$$V(X) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

2. Loi binomiale

Exercice

Une machine produit des pièces défectueuses avec probabilité $0,02$. On prélève 100 pièces indépendamment.

Soit X le nombre de pièces défectueuses.

1) Donner la loi de X.
2) Calculer $P(X = 0)$.
3) Calculer l'espérance et la variance.

Correction

Chaque pièce correspond à une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,02$.
Donc :

$$X \sim \mathcal{B}(100, 0, 02)$$

La formule générale est :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Pour $k = 0$:

$$P(X = 0) = (0,98)^{100}$$

Approximation :

$$(0,98)^{100} \approx 0,133$$

Espérance :

$$\mathbb{E}(X) = np = 100 \times 0,02 = 2$$

Variance :

$$V(X) = np(1-p) = 100 \times 0,02 \times 0,98 = 1,96$$

3. Loi géométrique

Exercice

On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6.
Soit X le rang du premier 6.

1) Identifier la loi.
2) Calculer $P(X = 4)$.
3) Calculer $P(X > 3)$.

Correction

La probabilité de succès vaut :

$$p = \frac{1}{6}$$

Donc :

$$X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$$

La formule de la loi géométrique est :

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$$

Alors :

$$P(X = 4) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6}$$

et

$$P(X > 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

4. Loi de Poisson

Exercice

Le nombre d'appels reçus par minute dans un standard suit une loi de Poisson de paramètre 3.

1) Calculer $P(X = 2)$.
2) Calculer $P(X \geq 1)$.
3) Donner l'espérance et la variance.

Correction

$$X \sim \mathcal{P}(3)$$

La formule générale est :

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Donc :

$$P(X = 2) = e^{-3} \frac{3^2}{2!}$$

$$P(X = 2) = \frac{9}{2} e^{-3} \approx 0,224$$

Ensuite :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

or

$$P(X = 0) = e^{-3}$$

donc

$$P(X \geq 1) = 1 - e^{-3}$$

Enfin :

$$\mathbb{E}(X) = V(X) = \lambda = 3$$

5. Loi uniforme continue

Exercice

Soit $X \sim \mathcal{U}([2,5])$.

1) Donner la densité.
2) Calculer $P(3 \leq X \leq 4)$.
3) Calculer l'espérance.

Correction

La densité vaut :

$$f(x) = \frac{1}{5-2} = \frac{1}{3}$$

sur $[2,5]$.
Alors :

$$P(3 \leq X \leq 4) = \int_3^4 \frac{1}{3}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(4-3) = \frac{1}{3}$$

Pour une loi uniforme sur $[a,b]$:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

Donc :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$$

6. Loi exponentielle

Exercice

La durée de vie (en années) d'un composant suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,5$.

1) Calculer $P(X > 2)$.
2) Calculer $P(X \leq 1)$.
3) Donner l'espérance.

Correction

$$X \sim \mathcal{E}(0,5)$$

La densité est :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad (x \geq 0)$$

On sait que :

$$P(X > t) = e^{-\lambda t}$$

Donc :

$$P(X > 2) = e^{-0,5\times 2} = e^{-1}$$

et

$$P(X \leq 1) = 1 - e^{-0,5}$$

Enfin :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,5} = 2$$

7. Exercice de synthèse

Exercice

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
On sait que :

$$\mathbb{E}(X) = 4$$

et

$$V(X) = 2$$

Déterminer n et p.

Correction

Pour une loi binomiale :

$$\mathbb{E}(X) = np$$

et

$$V(X) = np(1-p)$$

Comme :

$$np = 4$$

on obtient :

$$4(1-p) = 2$$

Donc :

$$1 - p = \frac{1}{2}$$

et ainsi :

$$p = \frac{1}{2}$$

Puis :

$$n \times \frac{1}{2} = 4$$

donc :

$$n = 8$$

Conclusion :

$$X \sim \mathcal{B}\left(8, \frac{1}{2}\right)$$