



Mathématiques

Équations 1er et second degré

Fiche de synthèse

Version 1.1.0

→ *Document de référence*
→ *Mémo – vecteurs, droites et plans dans l'espace*
→ *Vecteurs – exercices – partie 2*
→ *Vecteurs – matrice – exemple – concret*

1 Plan du document	2
2 Préface	3
3 Équations et inéquations du 1er degré	3
3.1 Équations du 1er degré	3
3.2 Inéquations du 1er degré	3
3.2.1 Cas d'un produit : $(2x - 2)(4x + 16) > 0$	4
3.2.2 Cas d'un quotient : $\frac{(-2x - 2)(2x - 10)}{(-9x - 81)} \geq 0$	4
4 Équations et inéquations 2ème degré :	4
4.0.1 Équations simple :	4
4.0.2 Équations 2ème degré générale :	5
4.0.3 Inéquations 2ème degré :	5
5 Système d'équations :	8
5.1 Méthode de substitution	8
5.2 Méthode de combinaison linéaire	8
6 Équations et inéquations 3ème degré :	9
7 Fonction parabole	10
7.1 Forme canonique d'une fonction polynôme du 2ème degré	10
7.2 Propriété	10
7.2.1 Procédure	10
7.3 Variations, extremum et représentation graphique	10
7.3.1 Propriété	10
8 Résolution de problème	13
8.1 Exercice 18	13
8.2 Exercice 19	13
8.3 Exercice 20	14
8.4 Exercice 20	14
8.5 Exercice 21	14
8.6 Exercice 22	15
8.7 Exercice 23	15
8.8 Exercice 24	16
9 Tableau pour inéquation	17

2 Préface

WP-CMS

Une équation est, en mathématiques, une relation (en général une égalité) contenant une ou plusieurs variables.

Résoudre l'équation consiste à déterminer les valeurs que peut prendre la variable pour rendre l'égalité vraie.

La variable est aussi appelée inconnue et les valeurs pour lesquelles l'égalité est vérifiée solutions.

Note : la relation peut être aussi une inégalité.

Exemple :

– Relation à résoudre ;

$$27x - 471 = 31 + 10$$

– Regrouper les termes ;

$$27x - 31x = 101 + 471$$

– Simplifier ;

$$-4x = 572$$

– Diviser ;

$$x = -143$$

3 Équations et inéquations du 1er degré

3.1 Équations du 1er degré

Variables de droite à Gauche (changer le signe)

$$27x - 471 = 31x + 101$$

- **Regrouper** les termes

$$27x - 31x = 101 + 471$$

- **Simplifier**

$$-4x = 572$$

- **Diviser**

$$X = -143$$

3.2 Inéquations du 1er degré

Le carré d'un nombre est toujours positif)

$$3x - 6 \leq 6x - 12$$

- **Regrouper** les termes

$$3x - 6x \leq -12 + 6$$

- **Simplifier**

$$-3x \leq -6$$

- **Diviser**

$$x \geq \frac{-6}{-3}$$

Si passer à droite un nombre <0

Alors modifier sens de l'inégalité

- Solution

$$S = [2; +\infty[$$

3.2.1 Cas d'un produit : $(2x - 2)(4x + 16) > 0$ Étude du signe :

a	b	c
$2x - 2 > 0$	$4x + 16 > 0$	–
$2x > 2$	$4x > 16$	–
$x > 1$	$x > -7$	–

Tableau de résolution :

x	$-\infty$	-4	$-$	1	$+\infty$
a	–	–	–	+	+
b	–	–	+	+	+
<i>Inéquation</i>	+	+	–	+	+

Solutions : $S =]-\infty; -4[\cup]1; +\infty[$ **3.2.2 Cas d'un quotient : $\frac{(-2x - 2)(2x - 10)}{(-9x - 81)} \geq 0$** Étude du signe :

a	b	c
$-2x - 2 > 0$	$2x - 10 > 0$	$-9x - 81 > 0$
$-2x > 2$	$2x > 10$	$-9x > 81$
$x < -1$	$x > 5$	$x < -9$

Tableau de résolution :

x	$-\infty$	-9	-1	$.$	5	$+\infty$
a	+	+	–	–	–	–
b	–	–	–	–	+	+
c	+	–	–	–	–	–
<i>Inéquation</i>	–	+	+	–	+	+

Solutions : $S =]-9; -1] \cup [5; +\infty[$ **4 Équations et inéquations 2ème degré :****4.0.1 Équations simple :**

- Regrouper les termes

$$2x^2 = -3x$$

- Passer tous les termes à gauche

$$2x^2 + 3x$$

- Simplifier

$$x(2x + 3) = 0$$

- Solutions

$$\mapsto x = 0$$

$$\mapsto 2x = 3 = 0 \text{ donc } x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Solutions : } S \in I \{-1, 5; 0\}$$

4.0.2 Équations 2ème degré générale :

$$ax^2 + bx + c$$

- **Forme canonique**

- On calcule le nombre : $\Delta = b^2 - 4ac$

- On regarde le signe de Δ

* Si $\Delta < 0$ Alors l'équation n'a pas de solution

Si a , coefficient directeur > 0 les branches tournées vers le haut.

* Si $\Delta = 0$ Alors l'équation possède 1 solution : $x = -\frac{b}{a}$

* Si $\Delta > 0$ Alors, l'équation possède 2 solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

4.0.3 Inéquations 2ème degré :

$$x^2 + x - 1 > 0$$

- **Forme canonique**

- On calcule le nombre : $\Delta = 1 + 4 = 5$

- On regarde le signe de Δ

* Ici Δ est positif

- Solutions

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Solutions : } S =]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$$

$$(x^2 - 10x + 25)$$

$$\frac{4 - x^2}{1} \text{ Factorisation}$$

- Numérateur : $(x^2 - 10x + 25) \Rightarrow (x - 5)^2$

- Dénominateur : $(4 - x^2) \Rightarrow (x + 2)(x - 2)$

Étude du signe :

$x - 5 \leq 0$	$x + 2 \leq 0$	$x - 2 \leq 0$
$x - 5 \leq 0$	$x + 2 \leq 0$	$x - 2 \leq 0$
$x \leq 5$	$x \leq -2$	$x \leq +2$

Note importante : Si $-2x \leq 3$ Alors $x \geq -\frac{3}{2}$ Rappel $1 < 2$ et $-1 > -2$

Tableau de résolution :

x	$-\infty$	-2	$+2$	$+5$	WP-CMS $+\infty$		
$(x-5) \leq 0$	$\cdot$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$\cdot$
$(x+2) \leq 0$	$\cdot$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$\cdot$
$(x-2) \leq 0$	$\cdot$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$\cdot$
≤ 0	$\cdot$	$-$		$-$			

Raisonnement : Pour que l'expression soit $\leq$ alors pour $(x-5)$ il faut que $x \leq 5$ cf. le tableau des signes.

Solutions : $S =]-\infty; -2[\cup]2; +5]$

Notes importantes :

WP-CMS

Cas des inéquations < 0

- **SI** $a > 0$ et $\Delta > 0$ **ALORS** S est du type $]x_1; x_2[$

- **SI** $a < 0$ et $\Delta > 0$ **ALORS** S est du type $] -\infty; x_1[\cup]x_2 + \infty[$

Cas des inéquations > 0

- **SI** $a > 0$ et $\Delta > 0$ **ALORS** S est du type $] -\infty; x_1[\cup]x_2 + \infty[$

- **SI** $a < 0$ et $\Delta > 0$ **ALORS** S est du type $]x_1; x_2[$

5 Système d'équations :

WP-CMS

5.1 Méthode de substitution

1	$\begin{cases} 2x + y = 2,1 \\ x + 3y = 3,05 \end{cases}$	Isoler l'une des deux inconnues (ici y).
2	$\begin{cases} y = 2,1 - 2x \\ x + 3y = 3,05 \end{cases}$	Remplacer cette inconnue dans l'autre équation (ici y)
3	$\begin{cases} y = 2,1 - 2x \\ x + 3(2,1 - 2x) = 3,05 \end{cases}$	On a remplacé y
4	$\begin{cases} y = 2,1 - 2x \\ x + 6,3 - 6x = 3,05 \end{cases}$	Développer
5	$\begin{cases} y = 2,1 - 2x \\ x - 6x = 3,05 - 6,3 \end{cases}$	Trouver x
6	$\begin{cases} y = 2,1 - 2x \\ -5x = -3,25 \end{cases}$	Équation à une inconnue
7	$\begin{cases} y = 2,1 - 2x \\ x = \frac{-3,25}{-5} \end{cases}$	Calculer
8	$\begin{cases} y = 2,1 - 2x \\ x = 0,65 \end{cases}$	Remplacer x dans la 1 ^{er} équation
9	$\begin{cases} y = 2,1 - 2(0,65) \\ x = 0,65 \end{cases}$	Effectuer un dernier calcul
10	$\begin{cases} y = 0,8 \\ x = 0,65 \end{cases}$	Obtenir les deux solutions du système

5.2 Méthode de combinaison linéaire

1	$\begin{cases} 2x + y = 2,1 \\ x + 3y = 3,05 \\ - \end{cases}$	Multiplier par n tous le termes de la 1 ^{er} équation. Multiplier par m tous les termes de la 2 ^{ème} équation pour obtenir les mêmes coefficients devant.
2	$\begin{cases} 2x + y = 2,1 \\ 2x + 6y = 6,10 \end{cases}$	Ici $n = 1$ et $m = 2$
3	<i>Soustraction</i> $\begin{cases} 2x + y = 2,1 \\ 2x + 6y = 6,1 \end{cases}$	Faire une addition ou une soustraction de tous les termes
4	$\begin{cases} 0x - 5y = -4 \\ - \end{cases}$	.
5	$\begin{cases} y = \frac{-4}{-5} = 0,8 \\ - \end{cases}$	Calculer la valeur de y
6	$2x + y = 2,1 \text{ donc } 2x + 0,8 = 2,1$	Calculer la valeur de x
.	$2 = 2,1 - 0,8 \text{ donc } 2x = 1,3$	.
.	$x = 0,65$	.

Note : Si on doit multiplier l'une des deux équations par un nombre négatif Alors on peut la multiplier seule-

ment par le nombre positif associé puis additionner les deux équations au lieu de les soustraire. WP-CMS

6 Équations et inéquations 3ème degré :

$$3x^3 - 45x^2 + 141x + 189 = 0$$

1] **Commencer par chercher une solution évidente.**

$$P(x) = 3x^3 - 45x^2 + 141x + 189 = 0 \quad -1, \text{ semble être une solution évidente.}$$

$$P(-1) = 3(-1)^3 - 45(-1)^2 + 141(-1) + 189 = 0$$

Soit un polynôme P de degré n ,

Si a est une racine (solution) de P , Alors il existe un polynôme Q de degré $n - 1$, tel que $P(z) = (z - a)Q(z)$

$$P(x) \text{ , se factorise } (x + 1)Q(x) \Rightarrow (x + 1)(ax^2 + bx + c)$$

2] **Développer l'expression :**

$$- (x + 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx + \quad + \quad ax^2 + bx + c$$

$$- ax^3 + (b + a)x^2 + (c + b)x + c$$

3] **Calculer les nouveaux coefficients a, b, c par identification**

$$3x^3 - 45x^2 + 141x + 189 = ax^3 + (b + a)x^2 + (c + b)x + c$$

$$- \text{ avec } a = 3, b + a = -45, c + b = 141 \text{ et } c = 189$$

$$- \text{ donc } a = 3, b = -48 \text{ et } c = 189 \text{ Note : la formule } c + b = 141 \text{ est une vérification de } c$$

4] **Reformuler l'équation**

$$P(x) = 3x^3 - 45x^2 + 141x + 189 = (x + 1)(3x^2 - 48x + 189)$$

5] **Rechercher les solutions de l'équation du second degré**

$$(x + 1)(3x^2 - 48x + 189) = 0$$

$$* (x + 1) = 0 \text{ donne } x_1 = -1$$

$$* 3x^2 - 48x + 189 = 0$$

$$\text{donne } \Delta = b^2 - 4ac = 36$$

$$\text{donc } x_2 = \frac{+48 - 6}{6} = 7 \text{ et } x_3 = \frac{+48 + 6}{6} = 9$$

L'équation possède 3 solutions : $-1, 7$ et 9 .

7 Fonction parabole

WP-CMS

7.1 Forme canonique d'une fonction polynôme du 2ème degré

7.2 Propriété

Toute fonction polynôme f du second degré définie sur $\mathcal{R}$

par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la **forme canonique** $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

7.2.1 Procédure

Soit la fonction polynôme f du second degré définie sur $\mathcal{R}$

par $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$

1 - **Factoriser** le début de l'expression par **a**, le nombre situé devant x^2

$f(x) = 2x^2 - 20x + 10 \Rightarrow 2[x^2 - 10x] + 10 \rightarrow$ ATTENTION : il ne faut pas factoriser 10

2 - On **factorise** avec $x^2 - 10x$ qui est le début de l'identité remarquable de type $(a - b)^2$

$= 2[x^2 - 10x + 25 - 25] + 10 \rightarrow$ ATTENTION : on a ajouté fictivement 25, il faut maintenant le soustraire.

$= 2[(x^2 - 10x + 25) - 25] + 10$

3 - On distribue par **a**

$= 2(x - 5)^2 - 50 + 10$

4 - On obtient la **forme canonique** de f

$= 2(x - 5)^2 - 40$

5 - On calcule les **extremum**

Forme canonique $2(x - 5)^2 - 40$

Calcul du sommet $a(x + X_s) - Y_s \Rightarrow X_s = 5$ et $Y_s = -40$

7.3 Variations, extremum et représentation graphique

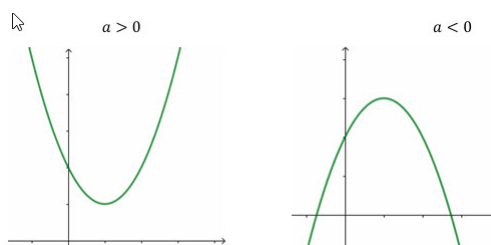
7.3.1 Propriété

Variations

Soit f une fonction polynôme du second degré, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$

- SI $a > 0$ Alors f est d'abord décroissante, puis croissante [branches de la courbe tournées vers le haut]

- SI $a < 0$ Alors f est d'abord croissante, puis décroissante [branches de la courbe tournées vers le haut]



Extremum

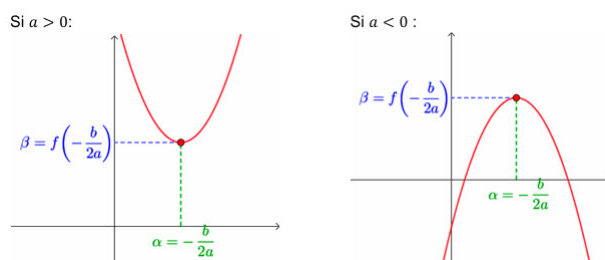
Soit f une fonction polynôme du second degré, telle que $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$

WP-CMS

- **SI** $a > 0$ **Alors** f admet un **minimum** pour $x = \alpha$. Ce minimum est égale à β .

- **SI** $a < 0$ **Alors** f admet un **maximum** pour $x = \alpha$. Ce maximum est égale à β .

Pour $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$, on a $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.



Définition

La représentation graphique d'une fonction polynôme f du second degré s'appelle une **parabole**.
Le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$ s'appelle le **sommet** de la parabole. Il correspond à l'**extremum** de la fonction.

Propriété

La parabole admet pour **axe de symétrie** la droite d'équation $x = \alpha$.

Exemple

Représenter graphiquement la fonction polynôme f du second degré définie sur $\mathcal{R}$ par
 $f(x) = -x^2 + 4x$

1 - Écrire f sous sa forme canonique

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x \\ &= -(x^2 - 4x) \text{ On factorise par } - \\ &= -[(x^2 - 4x + 4) - 4] \text{ On factorise par identité remarquable} \\ &= -(x - 2)^2 + 4 \\ &= -(x - 2)^2 + 4 \text{ On distribue par } - \\ \Rightarrow f, &\text{ admet donc un maximum en } \alpha = 2 \text{ et } \beta = 4 \end{aligned}$$

Remarque : On peut aussi appliquer les formules $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}$

Les variations de f sont donc données dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		4	

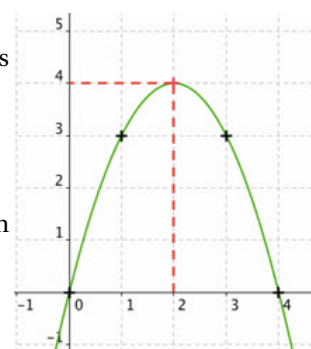
1. Pour représenter graphiquement la fonction f , on calcule les coordonnées de quelques points :

$$f(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 = 0$$

$$f(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 = 3$$

2. On obtient d'autres points par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \alpha = 2$.

3. On trace la courbe représentative de f ci-contre.



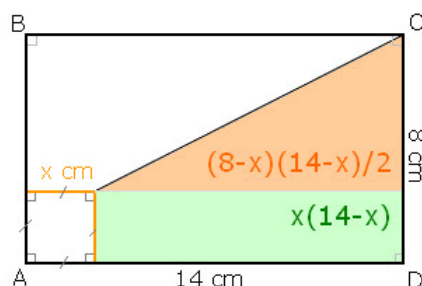
8 Résolution de problème

WP-CMS

8.1 Exercice 18

L'aire bleue est la somme des aires orange et verte.

C'est donc $\frac{(8-x)(14-x)}{2} + x(14-x)$.



Développons et réduisons cette expression : on obtient d'abord $\frac{112-8x-14x+x^2}{2} + 14x - x^2$ puis $56 - 11x + 0,5x^2 + 14x - x^2$ et enfin $-0,5x^2 + 3x + 56$.

La courbe de la fonction $f(x) = -0,5x^2 + 3x + 56$ est une parabole dont le sommet est en haut car le coefficient devant x^2 est négatif.

Comme nous l'avons vu dans le cours, elle est maximale pour $x = -\frac{b}{2a}$.

$\frac{-3}{-1} = 3$ donc elle est maximale pour $x = 3$.

Pour rendre l'aire bleue maximale, il faut prendre $x = 3$ cm.

8.2 Exercice 19

En additionnant les âges de Orphée et de Orthense on trouve 44. En multipliant leurs âges on trouve 468. Orphée est plus jeune que Orthense. Quel âge a Orphée?

On a posé x et y arbitrairement. On doit si nécessaire réaffecter

Posons $x = \text{"l'âge de Orphée"}$ et $y = \text{"l'âge de Orthense"}$.
 x et y vérifient le système :

$$\begin{cases} x + y = 44 \\ xy = 468 \end{cases}$$

les variables.

8.3 Exercice 20

WP-CMS

I

Combien mesure la longueur d'un rectangle de périmètre 38 cm et d'aire 84 cm²?

I

Posons l="la longueur du rectangle" et L="la largeur du rectangle"
On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} 2l + 2L = 38 \\ l \times L = 84 \end{cases}$$

8.4 Exercice 20

I

Combien mesure la longueur d'un rectangle de périmètre 38 cm et d'aire 84 cm²?

I

Posons l="la longueur du rectangle" et L="la largeur du rectangle"
On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} 2l + 2L = 38 \\ l \times L = 84 \end{cases}$$

8.5 Exercice 21

La somme des carrés de trois nombres entiers naturels consécutifs fait 16877.
Quel est le premier de ces nombres?

:

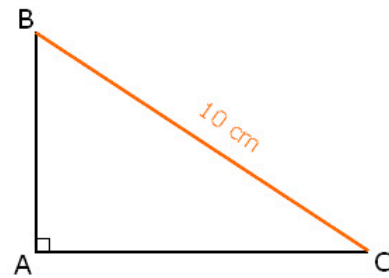
Appelons x le premier de ces trois nombres.
x vérifie l'équation $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 16877$.

REP=74

8.6 Exercice 22

WP-CMS

Donne un arrondi à 0,01 cm près des dimensions d'un triangle rectangle de périmètre 22 cm et d'hypoténuse 10 cm.



Posons $x=AB$ et $y=AC$.

Comme le périmètre du triangle mesure 22 centimètres, on a $x+y+10=22$.

D'après le [théorème de Pythagore](#) dans le triangle ABC rectangle en A, on a $x^2+y^2=100$

Donc $y=12-x$ et $x^2+(12-x)^2=100$.

Donc $x^2+144-24x+x^2-100=0$.

Donc $2x^2-24x+44=0$

$L=9,74$

$l=2,26$

8.7 Exercice 23

Appelons A_1 l'aire du triangle TRS, A_2 l'aire du quadrilatère SRUC, et x la longueur TS.

Exprimons en fonction de x les aires A_1 et A_2 :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{B \times h}{2} = \frac{(10-x) \times x}{2} = \frac{10x - x^2}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 5x \\ A_2 &= \frac{TU \times TC}{2} - A_1 = \frac{10 \times 6}{2} - \left(-\frac{1}{2}x^2 + 5x \right) \\ &= 30 + \frac{1}{2}x^2 - 5x \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 5x + 30 \end{aligned}$$

Cherchons si il existe une valeur de x pour laquelle ces deux aires sont égales :

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 \text{ donc } -\frac{1}{2}x^2 + 5x = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 30 \\ \text{donc } -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{1}{2}x^2 + 5x - 30 &= 0 \\ \text{donc } -x^2 + 10x - 30 &= 0 \end{aligned}$$

On doit résoudre une équation du second degré :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 10^2 - 4 \times (-1) \times (-30) \\ &= 100 - 120 \\ &= -20 \end{aligned}$$

Delta est négatif donc l'équation n'admet pas de solution, donc il n'existe pas de valeur de x pour laquelle les deux aires s

8.8 Exercice 24

WP-CMS

Les papas de Pimpim et Orphée font une course de vélo de 150 kilomètres. Ils partent en même temps. Le papa de Pimpim arrive 30 minutes avant. A quelle vitesse moyenne, arrondie à 0,01 km/h près, a roulé le papa de Pimpim ?



On a besoin de la formule de la vitesse, qui peut s'écrire $vitesse = \frac{distance}{temps}$.

Il faut faire attention aux unités : pour une vitesse en km/h, il faut écrire les longueurs en kilomètres et les durées en heures. Ici, 30 minutes est converti en 0,5 heure. En appelant v_0 la vitesse moyenne du papa de Orphée, t_0 le temps de course du papa de Orphée, v_p la vitesse moyenne du papa de Pimpim, et t_p le temps de course du papa de Pimpim, on a :

$$\begin{cases} t_p = t_0 - 0,5 \\ v_p = v_0 + 3 \end{cases}$$

En utilisant la formule de la vitesse dans la première ligne, le système devient :

$$\begin{cases} \frac{150}{v_p} = \frac{150}{v_0} - 0,5 \\ v_p - 3 = v_0 \end{cases}$$

En remplaçant la valeur de v_0 dans la première équation et en développant les calculs, on obtient une équation du deuxième degré.

9 Tableau pour inéquation

WP-CMS

x	$-\infty$	-2	$+2$	$+5$	$+\infty$
$(x-5) \leq 0$	-	-	-	0	+
$(x+2) \leq 0$	-	0	+	+	+
$(x-2) \leq 0$	-	-	0	+	+
≤ 0	-			-	

↪ Document de référence