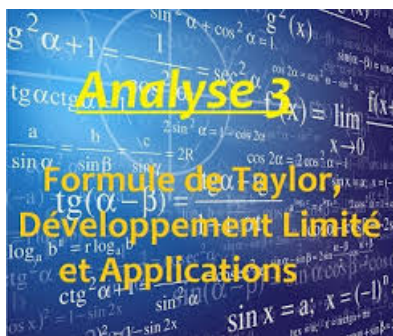




MATHÉMATIQUES

Développements limités

Cours

Version 1.1.0

→ *Document de référence*

→ *Package TiKz*

→ *Package Spreadtab*

Table des matières

1	Comprendre formule Taylor-Young	4
2	Catalogues [DL] usuels en 0	5
2.1	Catalogue 1 : $f(x) = e^x$	5
2.2	Catalogue 2 : $f(x) = \cos(x)$ DL en 0 à l'ordre 5	5
2.3	Catalogue 3 : $f(x) = \sin x$ DL en 0 à l'ordre 5	6
2.4	Catalogue 4 : $f(x) = \cosh(x)$ DL en 0 à l'ordre 5	6
2.5	Catalogue 5 : $f(x) = \sinh(x)$ DL en 0 à l'ordre 5	7
2.6	Catalogue 6 : $f(x) = (1+x)^\alpha$	7
2.7	Catalogue 7 : $f(x) = \sqrt{1+x}$ DL en 0 à l'ordre 2	7
2.8	Catalogue 8 : $f(x) = 1 \div (1+x)$ DL en 0 à l'ordre 2	7
3	Opérations sur les DL	8
3.1	[DL] en 0 somme ou produit de fonctions	8
3.1.1	Somme de fonction : $f(x) = e^x + 2\cos x$ DL en 0 à l'ordre 3	8
3.1.2	Somme de fonction : $f(x) = e^x + \sin x$ DL en 0 à l'ordre 2	8
3.1.3	Produit de fonction : $f(x) = e^x \cos x$ DL en 0 à l'ordre 3	9
3.1.4	Produit de fonction : $f(x) = e^x \sqrt{1+x}$ DL en 0 à l'ordre 2	9
3.2	[DL] en 0 quotient de fonctions	10
3.2.1	Quotient de fonction : $f(x) = \tan x = \sin x \div \cos x$ DL en 0 à l'ordre 3	10
3.2.2	Quotient de fonction : $f(x) = 1 + x \div \cos x + 1$ DL en 0 à l'ordre 2	10
3.2.3	Quotient de fonction : $f(x) = \ln(1+x) \div \sin x$ DL en 0 à l'ordre 2	11
4	[DL] en 0 d'une fonction composée	12
4.1	DL de la fonction : $f(x) = e^{-x}$ en 0 à l'ordre 2	12
4.2	DL de la fonction : $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ en 0 à l'ordre 4	12
4.3	DL de la fonction : $f(x) = e^{x^2-x+1}$ en 0 à l'ordre 2	13
4.4	DL de la fonction : $f(x) = \ln(\cos x)$ en 0 à l'ordre 4	13
5	[DL] généralisé en l'infini - Comportement asymptotique	14
5.1	Exemples A	14
5.1.1	Exemple 1 : $e^{1/x \div x}$	14
5.1.2	Exemple 2 : $\ln(1 - (1 \div x^2))$	15

5.1.3	Exemple 3 :	$\cos(3 \div x)$	WP-CMS	15
5.2	Exemples B			16
5.2.1	Exemple 1 :	$f(x) = x^2 \ln(x - 1 \div x)$		16
5.2.2	Exemple 2 :	$f(x) = e^{-1 \div x} \sqrt{x^2 + 1}$		16
5.2.3	Exemple 3 :	$f(x) = e^{2x-1 \div x^2}$		17
5.2.4	Exemple 4 :	$f(x) = \sqrt{x^2 + 9x - 1}$		17
5.3	Travaux pratiques			18

Chapitre 1

Comprendre formule Taylor-Young

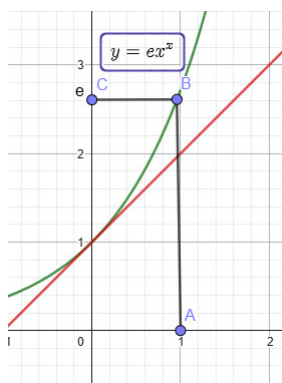
Il s'agit d'**approcher localement une fonction par un polynôme**.

En effet ce dernier est beaucoup plus facile à manipuler que des fonctions compliquées.

On sait que $f(x) \approx f(0) + xf'(0)$ si x est proche de 0. Avec $f(0) + xf'(0)$, la tangente de $f(x)$ en 0.

- $f(x) = e^x$ Pour $x = 0 \Rightarrow e^x = 1 + x$ si x est proche de 0 $\Rightarrow (e^{0,03} \approx 1,03)$
- $f(x) = e^x$ Pour $x = 1 \Rightarrow e^x = 1 + 1$ si x est proche de 1 $\Rightarrow e^2 \approx 2$

Cela ne fonctionne pas pour 1 car $e = 2,7$? Il faut donc être proche de 0.



SI f est C^n [Dérivable n fois] sur un intervalle ouvert I et $0 \in I$ **ALORS**

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n \sum(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \sum(x) = 0$$

◦ $f(0) + xf'(0)$, la tangente en 0

◦ $\frac{x^2}{2!}f''(0)$, le terme non nul suivant donne la position relative de la courbe

◦ $x^n \sum(x)$, le reste

Cette égalité est valable $\forall x \in I$ **MAIS** elle n'est applicable que **SI** x est proche de 0.

On parle ainsi de **développement limités [DL] à l'ordre n en 0**

La formule de Taylor-Young est une généralisation de ce résultat et permet d'avoir une plus grande précision

Chapitre 2

Catalogues [DL] usuels en 0

Rappel : formule de Taylor-Young.

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \Sigma(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \Sigma(x) = 0$$

2.1. CATALOGUE 1 : $f(x) = e^x$

Rappel : $(e^x)' = e^x$ et $e^0 = 1$

On applique la formule de Taylor-Young.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \Sigma(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \Sigma(x) = 0$$

- $y = x + 1$, l'équation de la tangente en 0
- $\frac{x^2}{2!}$, le terme suivant. Ici le terme est $> 0 \Rightarrow$ La courbe est au dessus de la tangente.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \Sigma(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \Sigma(x) = 0$$

2.2. CATALOGUE 2 : $f(x) = \cos(x)$ DL EN 0 À L'ORDRE 5

Puissance paires et signes alternés

Rappel :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(0) + \frac{x^5}{5!} f^{(5)}(0) + x^5 \Sigma(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \Sigma(x) = 0$$

$f(0)$	$f'(0)$	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f^{(4)}(0)$	$f^{(5)}(0)$
$\cos(0)$	$-\sin(0)$	$-\cos(0)$	$\sin(0)$	$\cos(0)$	$-\sin(0)$
1	0	-1	0	1	0

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \Sigma(x)$$

2.3. CATALOGUE 3 : $f(x) = \sin x$ DL EN 0 À L'ORDRE 5

WP-CMS

Puissance paires et signes alternés

Rappel :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(0) + \frac{x^5}{5!} f^{(5)}(0) + x^5 \Sigma(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \Sigma(n) = 0$$

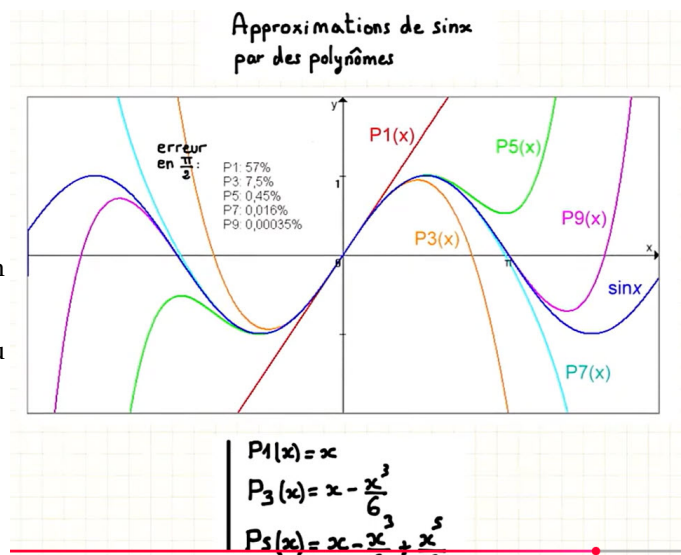
$f(0)$	$f^1(0)$	$f^2(0)$	$f^3(0)$	$f^4(0)$	$f^5(0)$
$\sin(0)$	$\cos(0)$	$-\sin(0)$	$-\cos(0)$	$\sin(0)$	$\cos(0)$
0	1	0	-1	0	1

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \Sigma(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \Sigma(n) = 0$$

- $y = x$, l'équation de la tangente en 0
- $-\frac{x^3}{3!}$, le terme suivant.

SI $x > 0$ le terme est $<$ La courbe $[C_f]$ est en dessous de la tangente.

SI $x < 0$ le terme est $>$ La courbe $[C_f]$ est au dessus de la tangente.



2.4. CATALOGUE 4 : $f(x) = \cosh x(x)$ DL EN 0 À L'ORDRE 5

Rappel :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(0) + \frac{x^5}{5!} f^{(5)}(0) + x^5 \Sigma(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \Sigma(n) = 0$$

$$\circ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ Avec } \cosh 0 = 1 \text{ et } \cosh' x = \sinh x$$

$f(0)$	$f^1(0)$	$f^2(0)$	$f^3(0)$	$f^4(0)$	$f^5(0)$
$\cosh(0)$	$\sinh(0)$	$\cosh(0)$	$\sinh(0)$	$\cosh(0)$	$\sinh(0)$
1	0	1	0	1	0

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \Sigma(x)$$

2.5. CATALOGUE 5 : $f(x) = \operatorname{sh}x(x)$ DL EN 0 À L'ORDRE 5

WP-CMS

Rappel :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \frac{x^4}{4!}f^{(4)}(0) + \frac{x^5}{5!}f^{(5)}(0) + x^5 \sum(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \sum(n) = 0$$

$$\circ \operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ Avec } \operatorname{sh}0 = 0 \text{ et } \operatorname{sh}x' = \operatorname{ch}x$$

$f(0)$	$f^1(0)$	$f^2(0)$	$f^3(0)$	$f^4(0)$	$f^5(0)$
$\operatorname{sh}(0)$	$\operatorname{ch}(0)$	$\operatorname{sh}(0)$	$\operatorname{ch}(0)$	$\operatorname{sh}(0)$	$\operatorname{ch}(0)$
0	1	0	1	0	1

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \sum(x)$$

2.6. CATALOGUE 6 : $f(x) = (1+x)^\alpha$

$$\text{Rappel : } f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n \sum(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \sum(n) = 0.$$

$$- f(x) = (1+x)^\alpha \Rightarrow f(0) = 1 \text{ avec } [(u^n)' = nu' u^{n-1} u(x) = 1+x \Rightarrow u(x) = 1]$$

$$- f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow f'(0) = \alpha$$

$$- f^2(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \Rightarrow f^2(0) = \alpha(\alpha-1)$$

$$- f^3(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} \Rightarrow f^3(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$$

$$- \text{Par récurrence } f^n(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)$$

$$f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n \sum(x)$$

2.7. CATALOGUE 7 : $f(x) = \sqrt{1+x}$ DL EN 0 À L'ORDRE 2

$$f(x) = \sqrt{1+x} \Rightarrow (1+x)^{\frac{1}{2}} \text{ On pose } \alpha = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + x^2 \sum(x)$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \sum(x)$$

2.8. CATALOGUE 8 : $f(x) = 1 \div (1+x)$ DL EN 0 À L'ORDRE 2

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow (1+x)^{-1} \text{ On pose } \alpha = -1$$

$$f(x) = 1 - x + \frac{2}{2!}x^2 + x^2 \sum(x)$$

$$f(x) = 1 - x + x^2 + x^2 \sum(x)$$

Chapitre 3

Opérations sur les DL

3.1. [DL] EN 0 SOMME OU PRODUIT DE FONCTIONS

3.1.1 Somme de fonction : $f(x) = e^x + 2\cos x$ DL en 0 à l'ordre 3

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \Sigma(x)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3 \Sigma(x)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \Sigma(x)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^3 \Sigma(x)$

$$f(x) = e^x + 2\cos x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 2\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + x^3 \Sigma(x)$$

$$f(x) = e^x + 2\cos x = 3 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \Sigma(x)$$

- $y = 3 + x$, l'équation de la tangente en 0
- $-\frac{x^2}{2!}$, le terme suivant est < La courbe $[C_f]$ est en dessous de la tangente.

3.1.2 Somme de fonction : $f(x) = e^x + \sin x$ DL en 0 à l'ordre 2

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \Sigma(x)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^2 \Sigma(x)$
- $f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \Sigma(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \Sigma(n) = 0$
- $\sin(x) = x + x^2 \Sigma(x)$

$$f(x) = e^x + \sin x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + x + x^2 \Sigma(x)$$

$$f(x) = e^x + \sin x = 1 + 2x + \frac{x^2}{2!} + x^2 \Sigma(x)$$

- $y = 1 + 2x$, l'équation de la tangente en 0
- $+\frac{x^2}{2!}$, le terme suivant est > La courbe $[C_f]$ est au dessus de la tangente.

3.1.3 Produit de fonction : $f(x) = e^x \cos x$ DL en 0 à l'ordre 3

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \Sigma(x)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3 \Sigma(x)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \Sigma(x)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^3 \Sigma(x)$
- $f(x) = e^x \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) + x^3 \Sigma(x)$
- $f(x) = e^x \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{6} + x^3 \Sigma(x)$

$$f(x) = e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} + x^3 \Sigma(x)$$

• $y = 1 + x$, l'équation de la tangente en 0

• $-\frac{x^3}{3!}$, le terme suivant est

SI $x > 0$ le terme est $<$ La courbe $[C_f]$ est en dessous de la tangente.

SI $x < 0$ le terme est $>$ La courbe $[C_f]$ est au dessus de la tangente.

Note importante : On tronque tous ce qui est supérieure à l'ordre 3.

3.1.4 Produit de fonction : $f(x) = e^x \sqrt{1+x}$ DL en 0 à l'ordre 2

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \Sigma(x)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^2 \Sigma(x)$
- $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \Sigma(x)$
- $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \Sigma(x)$
- $f(x) = e^x \sqrt{1+x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right) + x^2 \Sigma(x)$
- $f(x) = e^x \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + x^2 \Sigma(x)$

$$f(x) = e^x \sqrt{1+x} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + x^2 \Sigma(x)$$

•
•

Méthode : division par puissance croissante (le dénominateur doit commencer par une constante)

3.2.1 Quotient de fonction : $f(x) = \tan x = \sin x \div \cos x$ DL en 0 à l'ordre 3

• $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \sum(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \sum(n) = 0$

◦ A l'ordre 3 $\Rightarrow \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \sum(x)$

• $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \sum(x)$

◦ A l'ordre 3 $\Rightarrow \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \sum(x)$

$$Taux = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{1}{3}x^3 + x^3 \sum(x)$$

$$\begin{array}{r|l} 0 + x - \frac{1}{6}x^3 & 1 - \frac{1}{2}x^2 \\ 0 + x - \frac{1}{2}x^3 & 0 + x + \frac{1}{3}x^3 \\ \hline 0 + 0 + \frac{1}{3}x^3 & \\ 0 + 0 + \frac{1}{3}x^3 & \\ \hline & \dots \end{array}$$

Remarque importante : On n'écrit pas les puissances supérieures à l'ordre demandé.

3.2.2 Quotient de fonction : $f(x) = 1 + x \div \cos x + 1$ DL en 0 à l'ordre 2

• $f(x) = 1 + x$ C'est déjà un polynôme donc la DL.

◦ $f(x) = 1 + x$

• $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \sum(x)$

◦ A l'ordre 2 $\Rightarrow \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \sum(x)$

$$f(x) = \frac{1+x}{\cos x + 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \sum(x)$$

$$\begin{array}{r|l} 1 + x & 2 - \frac{1}{2}x^2 \\ 1 - \frac{1}{4}x^2 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 \\ \hline 0 + x + \frac{1}{4}x^2 & \\ 0 + x & \dots \\ \hline 0 & + \frac{1}{4}x^2 \\ & \dots \end{array}$$

Remarque importante : On n'écrit pas les puissances supérieures à l'ordre demandé.

3.2.3 Quotient de fonction : $f(x) = \ln(1+x) \div \sin x$ DL en 0 à l'ordre 2 ^{WP-CMS}

Rappels : $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$ car $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

- $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \Rightarrow f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \sum(x)$
- $f(x) = 1 - x + x^2 + x^2 \sum(x)$
- $f(x) = \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 \sum(x)$ Par intégration
- $f(x) = \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \sum(x)$
- $f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \sum(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \sum(n) = 0$
- $f(x) = x + x^2 \sum(x)$

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + x^2 \sum(x)}{x + x^2 \sum(x)}$$

Ici le dénominateur ne démarre pas par une constante.

$$= \frac{1 - \frac{x}{2} + x^2 \sum(x)}{1 + x^2 \sum(x)}$$

Mais on arrive pas à l'ordre 2. Il faut reprendre nos polynômes

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^3 \sum(x)}{x - \frac{x^3}{3} + x^3 \sum(x)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + x^2 \sum(x)}{1 - \frac{x^2}{6} + x^2 \sum(x)}$$

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + x^2 \sum(x)$$

• $y = 1 + \frac{x}{2}$, l'équation de la tangente en 0

• $+\frac{x^2}{2}$, le terme suivant est > 0

La courbe $[C_f]$ est au dessus de la tangente.

$$\begin{array}{r|l} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 & 1 - \frac{1}{6}x^2 \\ \hline 1 & -\frac{1}{6}x^2 \\ \hline & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 \\ & -\frac{1}{2}x - \dots \\ \hline & \frac{1}{2}x^2 \\ & \dots \end{array}$$

Remarque importante : On n'écrit pas les puissances supérieures à l'ordre demandé.

Chapitre 4

[DL] en 0 d'une fonction composée

SI $X \mapsto 0$ lorsque $x \mapsto 0$ ALORS on peut poser $X =$ polynôme en x (+reste éventuel).

Rappels :

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \sum(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \sum(n) = 0$
- $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \sum(x)$

4.1. DL DE LA FONCTION : $f(x) = e^{-x}$ EN 0 À L'ORDRE 2

- On écrit le DL usuel : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \sum(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \sum(n) = 0$
- On pose $X = -x$ et on vérifie la condition SI $x \mapsto 0$ ALORS $X \mapsto 0$
- Dans le DL usuel, on fait le changement de variable : $e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + X^2 \sum(X)$
- On remplace X par $-x$: $e^{-x} = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + x^2 \sum(x)$

$$f(x) = e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2 \sum(x)$$

4.2. DL DE LA FONCTION : $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ EN 0 À L'ORDRE 4

- On écrit le DL usuel : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \sum(x)$
- On pose $X = x^2$ et on vérifie la condition SI $x \mapsto 0$ ALORS $X \mapsto 0$
- Dans le DL usuel, on fait le changement de variable : $\sqrt{1+X} = 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + X^2 \sum(X)$
- On remplace X par x^2 : $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + x^4 \sum(x)$

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + x^4 \sum(x)$$

4.3. DL DE LA FONCTION : $f(x) = e^{x^2-x+1}$ EN 0 À L'ORDRE 2

- On écrit le DL usuel : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \sum(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \sum(n) = 0$
 - On pose $X = x^2 - x + 1$ et on vérifie la condition **SI** $x \rightarrow 0$ **ALORS** $X \rightarrow 1$
 - ★ On recherche une alternative : $f(x) = e^{x^2-x+1} \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2-x} * e^1$
 - On pose $X = x^2 - x$ et on vérifie la condition **SI** $x \rightarrow 0$ **ALORS** $X \rightarrow 0$
 - Dans le DL usuel, on fait le changement de variable : $e^X * e^1 = 1 + X + \frac{X^2}{2} + x^2 \sum(x)$
 - On remplace X par $(x^2 - x)$: $e^{x^2-x+1} = e \left(1 + (x^2 - x) + \frac{(x^2 - x)^2}{2} + x^2 \sum(x) \right) = e \left(1 + (x^2 - x) + \frac{x^2}{2} + x^2 \sum(x) \right)$
- CAR** dans l'identité remarquable $(x^2 - x)^2 = x^4 - 2x^3x + x^2$, on élimine x^4 et x^3 .

$$f(x) = e^{x^2-x+1} = e - ex + \frac{3}{2}ex^2 + x^2 \sum(x)$$

4.4. DL DE LA FONCTION : $f(x) = \ln(\cos x)$ EN 0 À L'ORDRE 4

- On écrit le DL usuel : $f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \sum(x) \right)$
 - On écrit le DL usuel : $\ln(1 + X) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \sum(x) \right)$
 - On pose $X = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \sum(x)$ et on vérifie la condition **SI** $x \rightarrow 0$ **ALORS** $X \rightarrow 0$
 - Dans le DL usuel, on fait le changement de variable : $\ln(1 + X) = X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{4}X^4 + X^4 \sum(X)$
 - On remplace X par : $-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \sum(x)$
 - Dans le DL usuel, on fait le changement de variable : $f(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \right)^2 + x^2 \sum(x)$
- CAR** dans l'identité remarquable $\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \right)^2 = \left(-\frac{1}{2}x^2 \right)^2 + 2ab + b^2$ on élimine les ordres supérieurs = 4.

$$f(x) = \ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + x^4 \sum(x) \quad \text{On ne conserve que l'ordre 4.}$$

Chapitre 5

[DL] généralisé en l'infini - Comportement asymptotique

Objectif : Comprendre comment une courbe se comporte quand $x \rightarrow \infty$

5.1. EXEMPLES A

5.1.1 Exemple 1 : $e^{1/x}$

- On écrit le DL usuel $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^n \sum(x)$
 - On pose $X = \frac{1}{x}$ et on vérifie la condition **SI** $x \rightarrow \infty$ **ALORS** $X \rightarrow 0$
 - Dans le DL usuel, on fait le changement de variable : $e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + X^2 \sum(X)$
 - On remplace X par $\frac{1}{x}$
 - Dans le DL usuel, on fait le changement de variable : $e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \sum(\frac{1}{x})$
- $$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \sum(\frac{1}{x})$$
- L'asymptote est $y = 1$
 - La position relative $\frac{1}{x} > 0$ C_f est au dessus de l'asymptote.
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow$ asymptote horizontale égale à 1

5.1.2 Exemple 2 : $\ln(1 - (1 \div x^2))$

- On écrit le DL usuel $\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^2 \sum(x)$
 - On pose $X = -\frac{1}{x^2}$ et on vérifie la condition **SI** $x \mapsto \infty$ **ALORS** $X \mapsto 0$
 - Dans le DL usuel, on fait le changement de variable : $\Rightarrow \ln(1 + X) = X - \frac{1}{2}X^2 \sum(X)$
 - On remplace X par $-\frac{1}{x^2}$
 - Dans le DL usuel, on fait le changement de variable : $\ln(1 - \frac{1}{x^2}) = (-\frac{1}{x^2}) - \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x^4}\right) + \frac{1}{x^4} \sum(\frac{1}{x})$
- $$\ln(1 - \frac{1}{x^2}) = (-\frac{1}{x^2}) - \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x^4}\right) + \frac{1}{x^4} \sum(\frac{1}{x})$$
- L'asymptote est $y = 0$
 - La position relative $-\frac{1}{x^2} < 0$ C_f est en dessous de l'asymptote.
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 - \frac{1}{x^2}) = 0 \Rightarrow$ asymptote horizontale égale à 0

5.1.3 Exemple 3 : $\cos(3 \div x)$

- On écrit le DL usuel $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2 \sum(x)$
 - On pose $X = \frac{3}{x}$ et on vérifie la condition **SI** $x \mapsto \infty$ **ALORS** $X \mapsto 0$
 - Dans le DL usuel, on fait le changement de variable : $\cos X = 1 - \frac{1}{2}X^2 + X^2 \sum(X)$
 - On remplace X par $\frac{3}{x}$
 - Dans le DL usuel, on fait le changement de variable : $\cos(\frac{3}{x}) = 1 - \frac{9}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \sum(\frac{1}{x})$
- $$\cos(\frac{3}{x}) = 1 - \frac{9}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \sum(\frac{1}{x})$$
- L'asymptote est $y = 1$
 - La position relative $-\frac{9}{2x^2} < 0$ C_f est en dessous de l'asymptote.
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(\frac{3}{x}) = 1 \Rightarrow$ asymptote horizontale égale à 1

5.2.1 Exemple 1 : $f(x) = x^2 \ln(x-1 \div x)$

- On écrit le DL usuel $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \Sigma(x)$
 - On met en évidence un changement de variable $x^2 \ln(\frac{x-1}{x}) = x^2 \ln(1 - \frac{1}{x})$ [1]
 - On pose $X = -\frac{1}{x}$ et on vérifie la condition **SI** $x \mapsto \infty$ **ALORS** $X \mapsto 0$
 - Dans le DL usuel, on fait le changement de variable : $\ln(1+X) = x - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 + X^3 \Sigma(X)$
 - On remplace X par $-\frac{1}{x}$ [1]
 - Dans le DL usuel, on fait le changement de variable : $x^2 \left\{ \left(-\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2}\right) \left(+\frac{1}{3} \frac{-1}{x^3}\right) + \frac{1}{x^3} \Sigma\left(\frac{1}{x}\right) \right\}$
- $$f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = -x - \frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x} \Sigma\left(\frac{1}{x}\right)$$
- L'**asymptote** est $y = -x - \frac{1}{2}$
 - La **position relative** $-\frac{1}{3x} < 0$ C_f est en dessous de l'asymptote.
 - $\lim_{x \rightarrow \infty}$

5.2.2 Exemple 2 : $f(x) = e^{-1 \div x} \sqrt{x^2 + 1}$

- On écrit les DL usuels :
 - $e^X = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + X^2 \Sigma(X)$
 - $\sqrt{1+X} = 1 + \frac{1}{2}X + X \Sigma(X)$
 - Préparer le choix de X_1 en mettant en facteur le terme le plus haut x^2 :

$$\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$
 - On pose $X = -\frac{1}{x}$ et on vérifie la condition **SI** $x \mapsto \infty$ **ALORS** $X \mapsto 0$
 - Dans le DL[1] usuel, on fait le changement de variable : $e^{-\frac{1}{x}} = [1] \left[-\frac{1}{x} \right] \left[+\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right] + \frac{1}{x^2} \Sigma\left(\frac{1}{x}\right)$
 - Dans le DL[2] usuel, on fait le changement de variable : $\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = [1] \left[+\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right] + \frac{1}{x^2} \Sigma\left(\frac{1}{x}\right)$
 - On concatène les 2 DL : $f(x) = e^{-1 \div x} \sqrt{x^2 + 1} = x \left[1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \Sigma\left(\frac{1}{x}\right) \right] \left[1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \Sigma\left(\frac{1}{x}\right) \right]$
 - $\Rightarrow x \left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \Sigma\left(\frac{1}{x}\right) \right)$
 - On ordonne : $x \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \Sigma\left(\frac{1}{x}\right) \right)$
- $$e^{-1 \div x} \sqrt{x^2 + 1} = x - 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \Sigma\left(\frac{1}{x}\right)$$
- L'**asymptote** est $y = x - 1$
 - La **position relative** $\frac{1}{x} > 0$ C_f est au dessus de l'asymptote.
 - $\lim_{x \rightarrow \infty}$

5.2.3 Exemple 3 : $f(x) = e^{2x-1+x^2}$

- On écrit les DL usuels :
 - [DL1] $e^X = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + X^2 \sum(X)$
 - [DL2] RAS
 - Préparer le choix de $X_1 : \frac{2x-1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$
 - On pose $X_1 = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ On vérifie **SI** $x \mapsto \infty$ **ALORS** $-\frac{1}{x} \mapsto 0$
 - Dans le DL[1] usuel, on fait le changement de variable : $f(x) = 1 + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{x^2} \sum\left(\frac{1}{x}\right)$
 - On développe : $f(x) = 1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^2} \sum\left(\frac{1}{x}\right)$ Pour $(a-b)^2$ on s'arrête à l'ordre 2.
 - On ordonne $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^2} \sum\left(\frac{1}{x}\right)$
- $$e^{\frac{2x-1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^2} \sum\left(\frac{1}{x}\right)$$
- L'asymptote est $y = 1$
 - La position relative $\frac{2}{x} > 0$ C_f est au dessus de l'asymptote.
 - $\lim_{x \rightarrow \infty}$

5.2.4 Exemple 4 : $f(x) = \sqrt{x^2 + 9x - 1}$

- On écrit les DL usuels :
 - [DL1] $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + X^2 \sum(X)$
 - [DL2] RAS
 - Préparer le choix de X_1 en mettant en facteur le terme le plus haut $x^2 : x\sqrt{1 + \frac{9}{x} - \frac{1}{x^2}}$
 - On pose $X_1 = \frac{9}{x} - \frac{1}{x^2}$ On vérifie **SI** $x \mapsto \infty$ **ALORS** $-\frac{1}{x} \mapsto 0$
 - Dans le DL[1] usuel, on fait le changement de variable : $f(x) = x \left\{ 1 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{9}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \right] - \left[\frac{1}{8} \left(\frac{9}{x} - \frac{1}{x^2} \right)^2 \right] + \frac{1}{x^2} \sum\left(\frac{1}{x}\right) \right\}$
 - On développe : $f(x) = x \left\{ 1 + \frac{9}{2x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8} \frac{81}{x^2} + \frac{1}{x^2} \sum\left(\frac{1}{x}\right) \right\}$ Pour $(a-b)^2$ on s'arrête à l'ordre 2.
 - On ordonne $f(x) = x \left\{ 1 + \frac{9}{2x} - \frac{85}{8x^2} + \frac{1}{x^2} \sum\left(\frac{1}{x}\right) \right\} = x + \frac{9}{2} - \frac{85}{8x} + \frac{1}{x} \sum\left(\frac{1}{x}\right)$
- $$\sqrt{x^2 + 9x - 1} = x + \frac{9}{2} - \frac{85}{8x} + \frac{1}{x} \sum\left(\frac{1}{x}\right)$$
- L'asymptote est $y = x + \frac{9}{2}$
 - La position relative $-\frac{85}{8x} < 0$ C_f est en dessous de l'asymptote.
 - $\lim_{x \rightarrow \infty}$

- $f(x) = \frac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{-1 + e^{\frac{1}{x}}}$ On pose $X = \frac{1}{x}$
- $f(x) = 5x + 3\sqrt{x^2 - 1}$ Mettre le x^2 en facteur