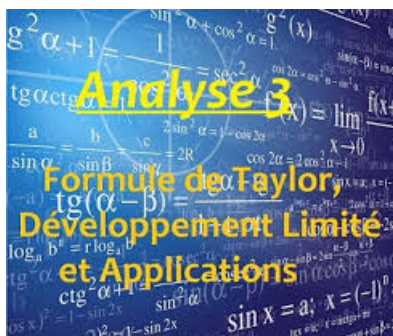




MATHÉMATIQUES

Equations différentielles

Cours

Version 1.1.0

→ *Document de référence*

→ *Package TiKz*

→ *Package Spreadtab*

Table des matières

1	Préliminaires	3
1.1	[ED] de type $y' - ay = 0$ avec a une constante	4
1.1.1	$y' - 3y = 0$ avec $y(0) = 1$	4
1.1.2	$3y' - 2y = 0$ avec $y(-1) = 1$	4
1.2	Équation du type $y' - a(x)y = 0$ avec $a(x)$, une fonction	5
1.2.1	$y' - 3x^2y = 0$ avec $y(0) = 2$	5
1.2.2	$(x^2 - 1)y' - 4xy = 0$ dans $]1; +\infty[$	6
1.2.3	$(x^2 - 1)y' = y$ dans $]1; +\infty[$	6
2	Équations différentielle d'ordre 1 et second membres	7
2.0.1	$y' - 3x^2y = x^2$ avec $y'(0) = 0$	8
2.0.2	$xy' - (x + 1)y = -3x^3 + 3x^2 + x + 1$ sur $]0, +\infty[$	8
3	[ED] Méthodes de la variation de la constante	9
3.1	$xy' + y = 5\ln x$ avec $x > 0$	10
3.2	$(x^2 + 1)y' - 2xy = x^2 + 1$	11
4	Travaux pratiques	12
4.1	ED 1	12
4.2	ED 2	12
4.3	ED 3	12

Chapitre 1

Préliminaires

Une équation différentielle [ED] est une équation dans laquelle **l'inconnue est une fonction**.

Exemple 1 [ED] linéaire d'ordre 1 homogène :

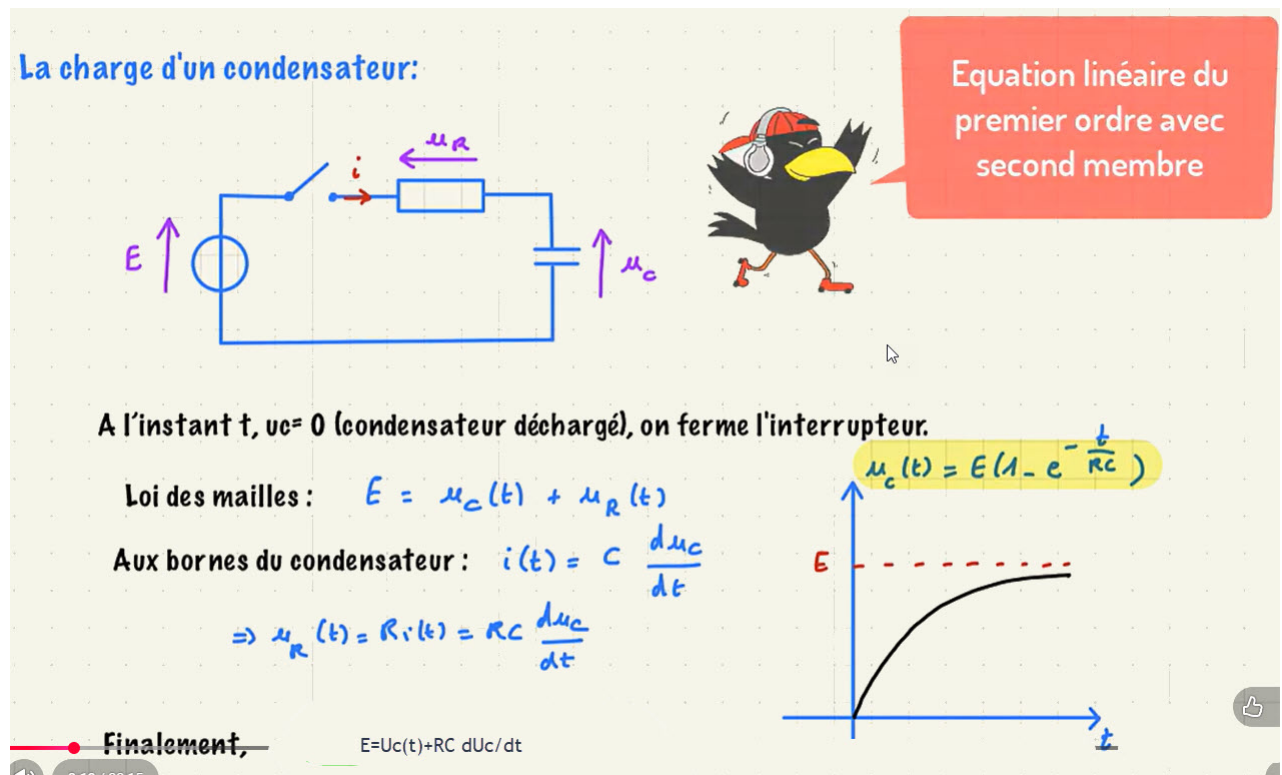
$y' = y$ On note y la **fonction inconnue**, à déterminer y' sa dérivée.

$$y' = Ke^x \Rightarrow y = Ke^x$$

Exemple 2 [ED] linéaire d'ordre 2 avec second membre :

$3y'' + 2y' + y = e^x$ est une équation différentielle d'ordre 2.

Les équations différentielles servent à **modéliser de nombreux problèmes de physique**, comme par exemple la décharge d'un condensateur au cours du temps.





c'est une équation :

- d'ordre 1
- à coefficient constant
- sans second membre (homogène)

L'équation $y' - ay = 0$ admet pour solution Ke^{ax} avec $K \in \mathcal{R}$

Car $(e^{ax})' = ae^{ax} \Rightarrow y' = ay$

1.1.1 $y' - 3y = 0$ avec $y(0) = 1$

$$y' - 3y = 0 \Rightarrow y' = 3y \Rightarrow \frac{y'}{y} = 3 \Rightarrow a(x) = 3$$

$$\ln|y| = 3x + C \quad \text{On intègre } \int \frac{u'}{u} = \ln|u| + c \text{ et } 3.$$

$$|y| = e^{3x+C} \quad \text{On élimine } \ln$$

$$y = \pm e^{3x+C} \quad \text{avec } K = \pm e^C$$

$$y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y = Ke^{3x}$$

Pour trouver K , il faut en plus une condition initiale. $y(0) = -1 \Rightarrow y(0) = Ke^0 = K = -1 \Rightarrow y = -e^{3x}$

1.1.2 $3y' - 2y = 0$ avec $y(-1) = 1$

$$3y' - 2y = 0 \Rightarrow 3y' = 2y \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow a(x) = \frac{2}{3}$$

$$3y' - 2y = 0 \Leftrightarrow Ke^{\frac{2}{3}x}$$

$$y(-1) = 1 \Rightarrow Ke^{-\frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{e^{-\frac{2}{3}}} = e^{\frac{2}{3}} \quad K = e^{\frac{2}{3}} \quad \text{Donc } y = e^{\frac{2}{3}} * e^{\frac{2}{3}x} = e^{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}x} = e^{\frac{2}{3}(1+x)} \quad y = e^{\frac{2}{3}(1+x)}$$

1.2. ÉQUATION DU TYPE $y' - a(x)y = 0$ AVEC $a(x)$, UNE FONCTION WP-CMS



C'est une équation :

- d'ordre 1
- $a(x)$, une fonction
- sans second membre (homogène)

Soit a une fonction continue sur intervalle I .

$y' - a(x)y = 0$ admet la solution générale : $y = Ke^{A(x)}$

avec $\begin{cases} \text{Avec } A(x) = \int a(x)dx \text{ une primitive de } a \\ K \in \mathcal{R} \\ \text{Astuce : } A(x) \text{ correspond au } \frac{y'}{y} \end{cases}$

1.2.1 $y' - 3x^2y = 0$ avec $y(0) = 2$

$$\begin{cases} y' - 3x^2y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$y' - 3x^2y = 0 \Rightarrow y' = 3x^2y \Rightarrow \frac{y'}{y} = 3x^2 \Rightarrow a(x) = 3x^2$$

$$\ln|y| = x^3 + C \quad \text{On intègre } \int \frac{u'}{u} = \ln|u| + c \text{ et 3.}$$

$$|y| = e^{x^3+C} \quad \text{On élimine } \ln$$

$$y = \pm e^{x^3+C} \quad \text{avec } K = \pm e^C$$

$$y' - 3x^2y = 0 \Leftrightarrow y = Ke^{x^3}$$

$$\text{Pour trouver } K, \text{ il faut en plus une condition initiale. } y(0) = 2 \Rightarrow y(0) = Ke^0 = K = 2 \Rightarrow y = 2e^{x^3}$$

1.2.2 $(x^2 - 1)y' - 4xy = 0$ dans $]1; +\infty[$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2 - 1)y' - 4xy = 0 \text{ dans }]1; +\infty[\end{array} \right.$$

On calcul $a(x) = \frac{y'}{y} : \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{+4x}{x^2 - 1}$ avec $(x^2 - 1) \neq 0 \Rightarrow a(x) = \frac{+4x}{x^2 - 1} \Rightarrow A(x) = \int \frac{+4x}{x^2 - 1} dx$

On intègre : $A(x) = 2 \int \frac{+2x}{x^2 - 1} dx = 2 \ln(x^2 - 1)$

On applique la formule : $y = Ke^{A(x)} = Ke^{2\ln(x^2 - 1)} = Ke^{\ln(x^2 - 1)^2} = K(x^2 - 1)^2$

$$(x^2 - 1)y' - 4xy = 0 \Rightarrow K(x^2 - 1)^2$$

1.2.3 $(x^2 - 1)y' = y$ dans $]1; +\infty[$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2 - 1)y' = y \text{ dans }]1; +\infty[\end{array} \right.$$

On calcul $a(x) = \frac{y'}{y} : \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2 - 1}$ avec $(x^2 - 1) \neq 0$

On développe $A(x) : \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} \Rightarrow A = \left[\frac{1}{x + 1} \right]_1 = \frac{1}{2}$ et $B = \left[\frac{1}{x - 1} \right]_{-1} = -\frac{1}{2}$

On intègre : $A(x) = \int \left(\frac{1 \div 2}{x - 1} - \frac{1 \div 2}{x + 1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln(x - 1) - \frac{1}{2} \ln(x + 1)$

On applique la formule : $y = Ke^{A(x)} = Ke^{\frac{1}{2} \ln(x - 1) - \frac{1}{2} \ln(x + 1)} = Ke^{\frac{1}{2} \ln(x - 1)} * e^{-\frac{1}{2} \ln(x + 1)}$

$$Ke^{\frac{1}{2} \ln(x - 1)} * e^{\frac{1}{2} \ln(x + 1)} = K\sqrt{x - 1} * \frac{1}{\sqrt{x + 1}} = K\sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$$

$$(x^2 - 1)y' = y \Rightarrow K\sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$$

Chapitre 2

Équations différentielle d'ordre 1 et second membre



C'est une équation différentielle :

- linéaire
- d'ordre 1
- $a(x)$, avec second membre.

[ED] de type $y' - a(x)y = b(x)$ avec la condition $y'(0) = 0$ [E] $y' - a(x)y = b(x)$, l'équation à résoudre [E0] $y' - a(x)y = 0$, l'équation homogène associée.



La procédure :

- On résout l'équation [E0], on note Y_0 la solution de [E0].
- On trouve une solution particulière Y_1 de [E].
- Conclusion : la solution générale de [E] s'écrit : $Y = Y_0 + Y_1$
- On applique ensuite éventuellement la condition initiale de y

Explication :

Soit :

- Y , la solution générale de [E]
- Y_1 , une solution particulière de [E]

ALORS $y' - a(x)y = b(x) - y_1' - a(x)y_1 = b(x) \Rightarrow y' - y_1' - a(x)(y - y_1)$

$Y' - a(x)Y = 0$ avec $Y = y - y_1$

DONC $y - y_1$ est solution de [E0] $y' - a(x)y = 0$ **ET** $y - y_1 = y_0$ et $y = y_0 + y_1$

2.0.1 $y' - 3x^2 y = x^2$ avec $y'(0) = 0$

- On résout l'équation [Eo], on note Y_0 la solution de [Eo].

$$(E_0) \quad y' - 3x^2 y = x^2 \Rightarrow \frac{y'}{y} = 3x^2 \Rightarrow a(x) = 3x^2 \Rightarrow A(x) = \int 3x^2 dx = x^3$$

$$Y_0 = Ke^{A(x)} = Ke^{x^3}$$

- On trouve une solution particulière Y_1 de [E].

Méthode : On cherche la solution

- soit sous la forme polynomiale

- soit sous la forme similaire aux terme de [ED]

Attention cette méthode n'est pas systématique.

$$y' - 3x^2 y = x^2 \text{ On cherche à éliminer } x^2 \quad y' = a \Rightarrow y' = 0$$

$$0 - 3x^2 a = x^2 \text{ On remplace } y \text{ par } a \text{ et } y' \text{ par } 0$$

$$-3a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$Y_1 = -\frac{1}{3}$$

- Conclusion : la solution générale de [E] s'écrit : $Y = Y_0 + Y_1$

$$y = Ke^{x^3} - \frac{1}{3}$$

- On applique ensuite éventuellement la condition initiale de y et non de y_0

$$y(0) = 0 \Rightarrow y(0) = Ke^0 - \frac{1}{3} = K - \frac{1}{3} \text{ Donc } K = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}e^{x^3} - \frac{1}{3}$$

2.0.2 $xy' - (x+1)y = -3x^3 + 3x^2 + x + 1$ sur $]0, +\infty[$

- On résout l'équation [Eo], on note Y_0 la solution de [Eo].

$$(E_0) \quad xy' - (x+1)y = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow a(x) = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow A(x) = \int 1 + \frac{1}{x} dx = x + \ln x$$

$$Y_0 = Ke^{A(x)} = Ke^{x+\ln x} = Ke^x * e^{\ln x} = kxe^x$$

- On trouve une solution particulière Y_1 de [E].

$$y' = ax^2 + bx + c \Rightarrow y' = 2ax + b$$

$$\text{On injecte dans l'équation } xy' - (x+1)y = -3x^3 + 3x^2 + x + 1$$

$$x(2ax + b) - (x+1)(ax^2 + bx + c) = -3x^3 + 3x^2 + x + 1$$

$$\text{On développe } 2ax^2 + bx - (ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c) = -3x^3 + 3x^2 + x + 1$$

$$\text{On ordonne } -ax^3 + (a-b)x^2 - cx - c = -3x^3 + 3x^2 + x + 1$$

$$\text{On compare } -a = -3, a-b=3, -c=1 \text{ et } -c=1 \Rightarrow a=3, b=a-3=0 \text{ et } c=1$$

$$Y_1 = 3x^2 - 1$$

- Conclusion : la solution générale de [E] s'écrit : $Y = Y_0 + Y_1$

$$y = Kxe^x + 3x^2 - 1$$

- On applique ensuite éventuellement la condition initiale de y et non de y_0 Ici aucune n'est demandée.

Chapitre 3

[ED] Méthodes de la variation de la constante



C'est une équation différentielle :

- linéaire
- d'ordre 1
- $a(x)$, avec second membre.

[ED] de type $y' - a(x)y = b(x)$ avec $x > 0$



Procédure :

- On résoud l'équation $[E_0] y' - a(x)y = 0$, on note Y_0 la solution de $[E_0]$
 - $\frac{y'}{y} \Rightarrow a(x) \Rightarrow A(x) = \int a(x) dx$ et $Y_0 = Kd^{A(x)} =$
- On trouve une solution particulière $[E_1]$, on note Y_1 la solution de $[E_1]$
 - On pose Y_1 et $Y_1' \Rightarrow$ On injecte dans $[E]$
 - On développe ($k(x)$ doit s'éliminer)
 - On intègre pour éliminer $k'(x)$
 - On cherche $y_1 =$
- Conclusion : la solution générale de $[E]$ s'écrit : $Y = Y_0 + Y_1$

3.1. $xy' + y = 5\ln x$ AVEC $x > 0$

WP-CMS

- On résout l'équation [Eo], on note $Y0$ la solution de [Eo].

$$(E_0) \quad xy' + y = 0 \Rightarrow xy' = -y \quad \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \Rightarrow a(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow A(x) = \int -\frac{1}{x} dx = -\ln x$$

$$Y0 = Kd^{A(x)} = Ke^{-\ln x} = Ke^{\ln(x^{-1})} = Kx^{-1} = \frac{k}{x} \quad \text{Rappel } n\ln x = \ln x^n$$

$$Y0 = Kd^{A(x)} = \frac{k}{x}$$

- On trouve une solution particulière [E] $Y1$.

Méthode de variation de la constante. On détermine d'abord $y0$ puis on fait varier la constante k .

◦ On a trouvé : $Y0 = \frac{k}{x} = k * \frac{1}{x}$

◦ On pose : $y1 = K(x) * \frac{1}{x} \Rightarrow y1' = K'(x) * \frac{1}{x} + K(x) - \frac{1}{x^2}$ Rappel $(uv)' = u'v + uv'$.

◦ On injecte $y1$ dans [E] : $xy' + y = 5\ln x \Rightarrow x \left(K'(x) * \frac{1}{x} + K(x) - \frac{1}{x^2} \right) + \left(K(x) * \frac{1}{x} \right) = 5\ln x$

- On développe. A ce stade $k(x)$ doit s'éliminer

$$k'(x) - \frac{1}{x}k(x) + \frac{1}{x}K(x) = 5\ln x \Rightarrow k'(x) = 5\ln x$$

- On intègre pour éliminer $k'(x)$ et obtenir $k(x)$:

$$k(x) = \int 5\ln x \, dx = \int 1 * \ln x$$

Rappel $\int u'v = uv - \int uv'$ avec $u'(x) = 1$ donc $u(x) = x$ et $v(x) = \ln x$ donc $v'(x) = \frac{1}{x}$

$$k(x) = \int \ln x \, dx = x\ln x - \int x * \frac{1}{x} \, dx = x\ln x - x$$

$$K(x) = 5(x\ln x - x)$$

◦ On cherche $y1 = K(x) * \frac{1}{x} = 5(x\ln x - x) * \frac{1}{x} = 5(\ln x - 1)$

$$Y1 = 5(\ln x - 1)$$

- **Conclusion** : la solution générale de [E] s'écrit : $Y = Y0 + Y1$

$$y = \frac{k}{x} + 5\ln x - 5.$$

3.2. $(x^2 + 1)y' - 2xy = x^2 + 1$

WP-CMS

- On résout l'équation [Eo], on note $Y0$ la **solution** de [Eo].

$$E0 \quad (x^2 + 1)y' - 2xy = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow a(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow A(x) = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln(x^2 + 1) \text{ Rappel } \int \frac{u'}{u} = \ln|u|$$

$$Y0 = Ke^{A(x)} = Ke^{\ln(x^2 + 1)}$$

$$Y0 = Ke^{A(x)} = K(x^2 + 1)$$

- On trouve une solution particulière [E] $Y1$.

Méthode de variation de la constante. On détermine d'abord $y0$ puis on fait varier la constante k .

◦ On a trouvé : $Y0 = K(x^2 + 1)$

◦ On pose : $y1 = K(x)(x^2 + 1) \Rightarrow y1' = k'(x)(x^2 + 1) + k(x) * 2x$ Rappel $(uv)' = u'v + uv'$.

◦ On injecte $y1$ dans [E] : $(x^2 + 1)y' - 2xy = x^2 + 1 \Rightarrow (x^2 + 1)(k'(x)(x^2 + 1) + k(x) * 2x)' - 2x(K(x)(x^2 + 1)) = x^2 + 1$

◦ On développe. A ce stade $k(x)$ doit s'éliminer

$$k'(x)(x^2 + 1)^2 + k(x) * 2x(x^2 + 1) - 2xK(x)(x^2 + 1) = x^2 + 1$$

$$k'(x) = \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{(x^2 + 1)}$$

◦ On intègre pour éliminer $k'(x)$ et obtenir $k(x)$:

$$k(x) = \int \frac{1}{(x^2 + 1)} dx = \arctan(x)$$

$$K(x) = \arctan(x)$$

◦ On cherche $y1 = K(x)(x^2 + 1) = \arctan(x)(x^2 + 1)$

$$Y1 = \arctan(x)(x^2 + 1)$$

- **Conclusion** : la solution générale de [E] s'écrit : $Y = Y0 + Y1$

$$y = (x^2 + 1)(k + \arctan(x))$$

Chapitre 4

Travaux pratiques

4.1. ED 1

Résoudre : exercice 1 $y(x) = K\sqrt{x^2 + 1}$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2 + 1)y' - xy = 0 \text{ dans } \mathcal{R} \end{array} \right.$$

Résoudre : exercice 2 $y(x) = Kx$

$$\left\{ \begin{array}{l} xy' - y = 0; \text{ dans }]0; +\infty[\end{array} \right.$$

Résoudre : exercice 3 $y(x) = \frac{Kx^2}{x^2 + 1}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(x^2 + 1)y' = 2y; \text{ dans }]0; +\infty[\end{array} \right.$$

4.2. ED 2

Résoudre : exercice 1 $y(x) = \frac{k}{x} + 5\ln x - 5$

$$\left\{ \begin{array}{l} [E]xy' + y = 5\ln x; \text{ dans }]0; +\infty[\end{array} \right. \quad \text{On cherche } Y_1 \text{ sous la forme } Y_1 = a\ln x + b$$

Résoudre : exercice 2 $y(x) = Ke^{x^2+2} + 2x^2 - 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} [E]xy' - (1 + x^2)y = -2x^4 + 3x^2 + 1; \text{ dans }]0; +\infty[\end{array} \right. \quad \text{On cherche } Y_1 \text{ sous la forme polynomiale.}$$

4.3. ED 3

Résoudre : exercice 1 $y(x) = Ke^{2\sqrt{x}} - 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} [E]\sqrt{x}y' - y = 1 \text{ dans }]0; +\infty[\\ y(1) = 0 \end{array} \right.$$

Pour Y_1 - Méthode 1 : trouver une solution évidente. - Méthode 2 : méthode de variation de la constante.

Résoudre : exercice 2 : $y(x) = e^{-2x}(k + e^x)(x - 1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} [E]y' + 2y = xe^{-x} \text{ Rappel } (e^{-x})' = -e^{-x} \end{array} \right.$$

- Méthode 1 : solution particulière de la forme $y_1 = (ax + b)e^{-x}$. - Méthode 2 : méthode variation de la constante.