π

Mathématiques

BACCALAURÉAT - MATHÉMATIQUES

Espace vectoriel

Sessions : 2022 - 2023 -2024 - 2025 - 2026

Table des matières

Chapitre 1

Session 2022

1.1. Énoncé (7 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{k}\,)$, on concidére :

• le point A de coordonnées $(-1;1;3)$

• la droite D dont la représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-1t \\ z = 2+2t \end{cases}$ avec $t \in \mathscr{R}$

On admet que le point A n'appartient pas à la droite D.

Rappels de cours :

• Si D une droite passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et dirigée par le vecteur (directeur) $\overrightarrow{u}\,(a; b; c)$.
Alors D est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow M \begin{cases} x = x_A \ + at \\ y = yA \ + bt \\ z = \underbrace{z}_{A} + \underbrace{c}_{\overrightarrow{u}} t \end{cases} \quad t \in \Re.$$ est **la représentation paramétrique de la droite** d.

• $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-(-1) \\ +3-(+1) \\ +0-(+3) \end{pmatrix}$

Question 01 :

Q01-a :

Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite D.

À partir de sa représentation paramétrique, on déduit que : $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite D.

Q01-b :

Montrer que le point $B\ (-1;3;0)$ appartient à la droite D.

Par définition de la représentation paramétrique d'une droite, on sait que le point $M\ (1;2;2) \in D$

ALORS $B \in D \Leftrightarrow \exists t \in \mathscr{R}, \overrightarrow{MB} = t\vec{u}$.

On a le vecteur : $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Et on remarque que $\overrightarrow{MB} = -\vec{u}$ les deux vecteurs sont donc colinéaires, le point B appartient bien à la droite D.

Q01-c :

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\vec{u}$.

Rappel : $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-(-1) \\ 3-1 \\ 0-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

D'où, on calcule le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = (0*2)+(2*-1)+(-3*2) = 0-2-6 = -8$

$\overrightarrow{AB}.\vec{u} = -8$

Question 02 :

On note P le plan passant par le point A et orthogonal à la droite D, et on appelle H le point d'intersection du plan P et de la droite D. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite D.

Q02-a :

Montrer que le plan P admet une équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.

Le plan P étant orthogonal à la droite D, le vecteur $\vec{u}$ directeur de la droite est un vecteur normal à P.

Le plan admet alors une équation cartésienne de la forme $2x - y + 2z + c = 0$ avec $c \in \mathscr{R}$.

Il reste alors à déterminer la valeur de C.

Sachant que $A(-1;1;3) \in P$, on a nécessairement $[2*(-1)]+[-1]+[2*3]+C = 0$

$\Rightarrow -2-1+6+c = 0 \Rightarrow C = -3$

Le plan P admet donc bien comme équation cartésienne $2x - y + 2z - 3 = 0$

Q02-b :

En déduire que le point H à pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9}\right)$.

On cherche les coordonnées du point H d'intersection entre D et P.

Soient $x; y; z \in \mathscr{R}$ les coordonnées du point H.

• − 1 $H \in P$, donc ces coordonnées vérifie l'équation $2x - y + 2z - 3 = 0$

• − 2 $H \in D$, donc il vérifie la représentation de la droite $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-1t \\ z = 2+2t \end{cases}$ avec $t \in \mathscr{R}$

Il vient donc : $H \in (P \bigcap D)$

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-1t \\ z = 2+2t \\ 2x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-1t \\ z = 2+2t \\ 2(1+2t) - (2-t) + 2(2+2t) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-1t \\ z = 2+2t \\ 9t + 1 = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $t = -\frac{1}{9}$, et dans ce cas avec l'équation paramétrique de la droite de D, on a :

$$\begin{cases} x = 1 + 2 * (-\frac{1}{9}) = \frac{7}{9} \\ y = 2 + \frac{1}{9} = \frac{19}{9} \\ z = 2 + 2 * (-\frac{1}{9} = \frac{16}{9}) \end{cases}$$

Finalement, on donc bien $H\left(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9}\right)$ coordonnées du point d'intersection entre D et P.

Q02-c :

Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

On à la distance euclidienne :

$$d = \sqrt{(\frac{7}{9}+1)^2 + (\frac{19}{9}-1)^2 + (\frac{16}{9}-3)^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{256}{81} + \frac{100}{81} + \frac{121}{81}} \Rightarrow \frac{477}{81} = \sqrt{\frac{53}{9}}$$

ALORS finalement $AH = \frac{\sqrt{53}}{3}$

Question 03 :

Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite D, par une autre méthode.

On rappelle que le point B $(-1;3;0)$ appartient à la droite D et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite D.

Q03-a :

Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k.\vec{u}$.

Les points B et H appartiennent tous les deux à la droite D de vecteur directeur $\vec{u}$.

ALORS par définition, $\exists k \in \mathscr{R}, \overrightarrow{HB} = k.\vec{u}$

Q03-b :

Montrer que $k = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{||\vec{u}||^2}$.

• On cherche à faire apparaître le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et exprimer k en fonction de son produit scalaire avec $\vec{u}$.

• On commence par appliquer la relation de **Chasles** à l'égalité montrée précédemment :

$\overrightarrow{HB} = k.\vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} = k.\vec{u}$

• ALORS on prend des deux cotés, le produit scalaire par $\overrightarrow{u}$:
$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u} = k.\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} \Rightarrow \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{u}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u} = k.||\overrightarrow{u}||^2$

• On sait que H est le projeté orthogonal de A sur la droite D. Donc par définition :
$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u}+\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{u} = 0$ L'égalité devient donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u} = k.||\overrightarrow{u}||^2$

• On a finalement $k = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2}$

Q03-c :

Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.

•ALORS on calcul $k = -\dfrac{8}{9}$ (la valeur de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u}$ ayant été calcule précédemment).

• Donc $\overrightarrow{HB} = -\dfrac{8}{9}\overrightarrow{u} = -\dfrac{8}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

•ALORS $\begin{pmatrix} -1-x_H \\ +3-y_H \\ +0-z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-16}{9} \\ +\dfrac{8}{9} \\ -\dfrac{16}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_H = \dfrac{16}{9}-1 \\ y_H = 3-\dfrac{8}{9} \\ z_H = \dfrac{16}{9} \end{cases}$

• Finalement on trouve bien $H\left(\dfrac{7}{9};\dfrac{19}{9};\dfrac{16}{9}\right)$, i.e. le même résultat que celui obtenu par l'autre méthode.

Question 04 :

On considère un point C appartenant au plan P tel que le volume du tétraèdre $ABCH$ soit égal à $\dfrac{8}{9}$.
Calculer l'aire du triangle ACH
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \dfrac{1}{3} * B * h$ ou B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

• On étudie le tétraèdre $ABCH$.
• On sait que B et H sont sur la droite D, que les points C et H sont sur le plan P.
• On sait également que la droite $D = (BH)$ est orthogonale au plan P.
• De plus, H est le projeté orthogonal de A sur la droite D et $A \in P$, donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH} = 0$

• Ainsi, la hauteur issue de ACH est la longueur HB
• Donc, en notant S l'aire du triangle ACH, on peut déduire : $V = \dfrac{1}{3} * S * ||\overrightarrow{HB}|| \Rightarrow S = \dfrac{3*V}{||\overrightarrow{HB}||}$

• Et comme $\overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix} \dfrac{-16}{9} \\ +\dfrac{8}{9} \\ -\dfrac{16}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow ||\overrightarrow{HB}|| = \dfrac{8}{3}$

• Finalement, on a $S = \dfrac{3*\dfrac{8}{9}}{\dfrac{8}{3}}$

Chapitre 2

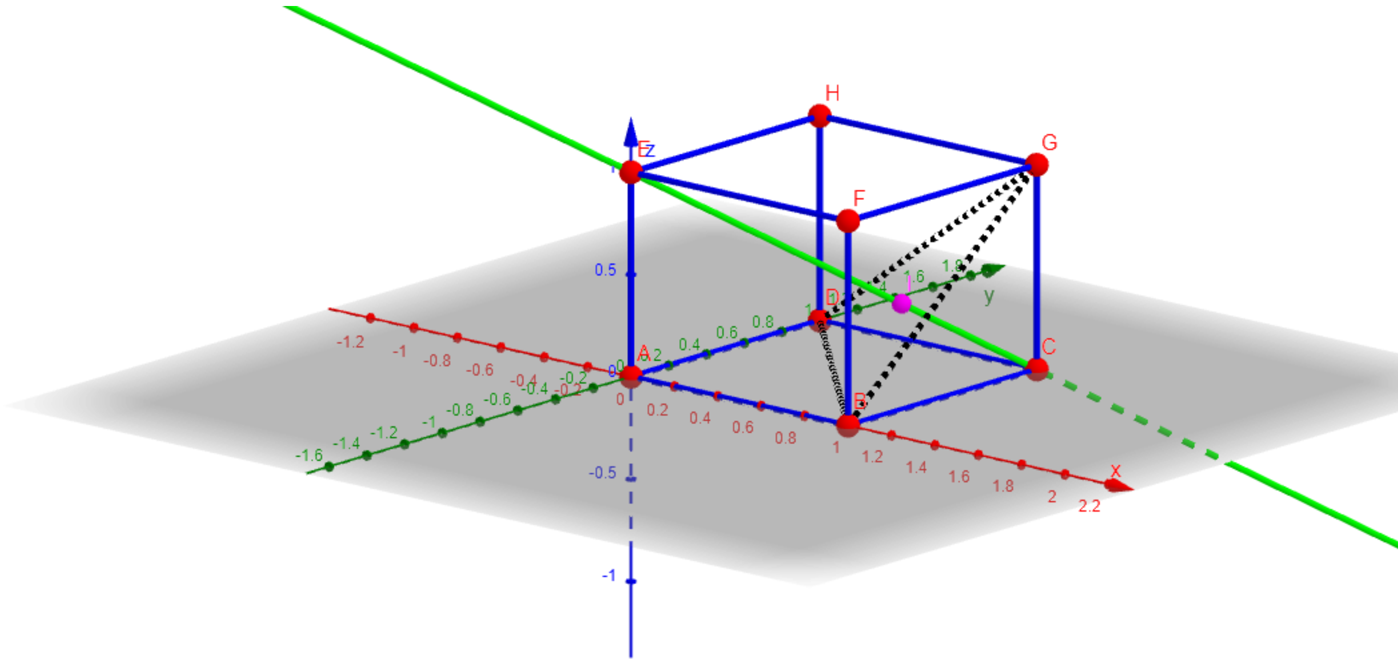
Session 2023

2.1. Énoncé (5 points)

• On concidére le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

• On appelle I le point d'intersection du plan GBD avec la droite (EC)

• L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.



Question 01 : Donner dans ce repère les coordonnées des points E, C, G.

$E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$

Question 02 : Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

• Il faut un point appartenant à la droite (EC)

On a $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

• Il faut également un vecteur directeur de (EC)

On a $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1-0\\11-0\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

• Une représentation paramétrique de (EC) est donc :

$\begin{cases} x = 0+1t \\ y = 0+1t \\ z = 1-1t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}$ avec $t \in \mathscr{R}$

Question 03 : Démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).

$\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}1-1\\0-1\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}0-1\\1-1\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan GBD

et $\overrightarrow{EC}$ est un vecteur directeur de la droite (EC).

OR $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{EC} = 1*0-1*1+(-1)*(-1) = 0$

De même $\overrightarrow{GD}.\overrightarrow{EC} = 1*(-1)+0*1+(-1)*(-1) = 0$

Ainsi, $\overrightarrow{EC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GD}$ donc (EC) est orthogonal au plan (GBD).

Question 04 :

Q04-a :

Justifier qu'une équation cartésienne du plan (GBD) est $x+y-z-1=0$.

• Un vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ suffit généralement à caractériser un plan.

• Dans ce cas, l'équation cartésienne du plan est de la forme $ax+by+cz+d=0$.

PUISQUE (EC) est orthogonal à (BDG), $\overrightarrow{EC}$ est un vecteur normal à (BDG).

DONC l'équation cartésienne de (BDG) est de la forme $1x+1y-1z+d=0$.

• Il reste à déterminer d. On sait qu'un point qui appartient au plan vérifie les coordonnées du plan.

OR $B \in (BDG)$ donc, $x_B + y_B - z_B + d = 0 \Rightarrow 1+0+0+d = 0 \Rightarrow d = -1$

Donc une équation cartésienne de (BDG) est $x+y-z-1=0$.

Q04-b :

Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

• I est l'intersection de (BDG) et de (EC).

• Il vérifie à la fois l'équation cartésienne de (BDG) et l'équation paramétrique de (EC).

$$\begin{cases} x_B + y_B - z_B - 1 = 0 \\ x_B = 1 + 2t \\ y_B = 2 - 1t \\ z_B = 2 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_B + t_B + t_B - 2 = 0 \\ x_B = 1 + 2t \\ y_B = 2 - 1t \\ z_B = 2 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t_B = 2 \\ x_B = 1 + 2t \\ y_B = 2 - 1t \\ z_B = 2 + 2t \end{cases} \Rightarrow t_B = \frac{2}{3}$$

Donc Les coordonnées de I sont donc $I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Q04-c :

En déduire que la distance du point E au plan (GBD) est égale à $\frac{2*\sqrt{3}}{3}$.

• Un schéma permet de se rendre compte que $d(E;GBD) = ||\overrightarrow{EI}||$

OR, $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix} 2\div3-0 \\ 2\div3-0 \\ 1\div3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\div3 \\ 2\div3 \\ -2\div3 \end{pmatrix}$

DONC $EI = \sqrt{3*(\frac{2}{3})^2} = \frac{2*\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Question 05 :

Q05-a :

Démontrer que le triangle BDG est équilatéral. .

• Pour montrer que BDG est équilatéral, il suffit de montrer que ses 3 cotés sont de même longueur.

• On calcul donc la norme des vecteurs associés aux 3 cotés :

$\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ de norme $\sqrt{2}$ $\quad \overrightarrow{GB}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ de norme $\sqrt{2}$ $\quad \overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de norme $\sqrt{2}$

Q05-b :

Calculer l'aire du triangle BDG. On pourra utiliser le point I, milieu du segment $[BD]$.

• Géométriquement, on a $\mathscr{A}_{BDG} = 2*\mathscr{A}_{BJG}$ OR, BJG est un triangle rectangle en J grâce aux propriétés sur les triangles équilatéraux.

DONC, en appliquant le théorème de Pythagore dans BJG, on trouve

$JG^2 + JB^2 = BG^2 \Rightarrow JG = \sqrt{BG^2 + JB^2} = \sqrt{2-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

CAR, $JB = \frac{DB}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

DONC,l'aire du triangle BJG est : $\mathscr{A}_{AJG} = \frac{JG*JB}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (moitié de l'aire d'un rectangle.)

ET DONC, $\mathscr{A}_{AJG} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Question 06 :

Justifier que le volume du tétraèdre $EGBD$ est égal à $\frac{1}{3}$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}Bh$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la hauteur relative à cette base.

• Le tétraèdre $EGBD$ à pour base BDG et pour hauteur relative EI

DONC, $\mathcal{V}_{EBD} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{BDG} = \frac{\sqrt{3} * 2}{3 * \sqrt{2} * \sqrt{3}}$

ET DONC, $\boxed{\mathcal{V}_{EBD} = \frac{1}{3}}$

Chapitre 3

Session 2024

3.1. ÉNONCÉ (5 POINTS)

• L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$

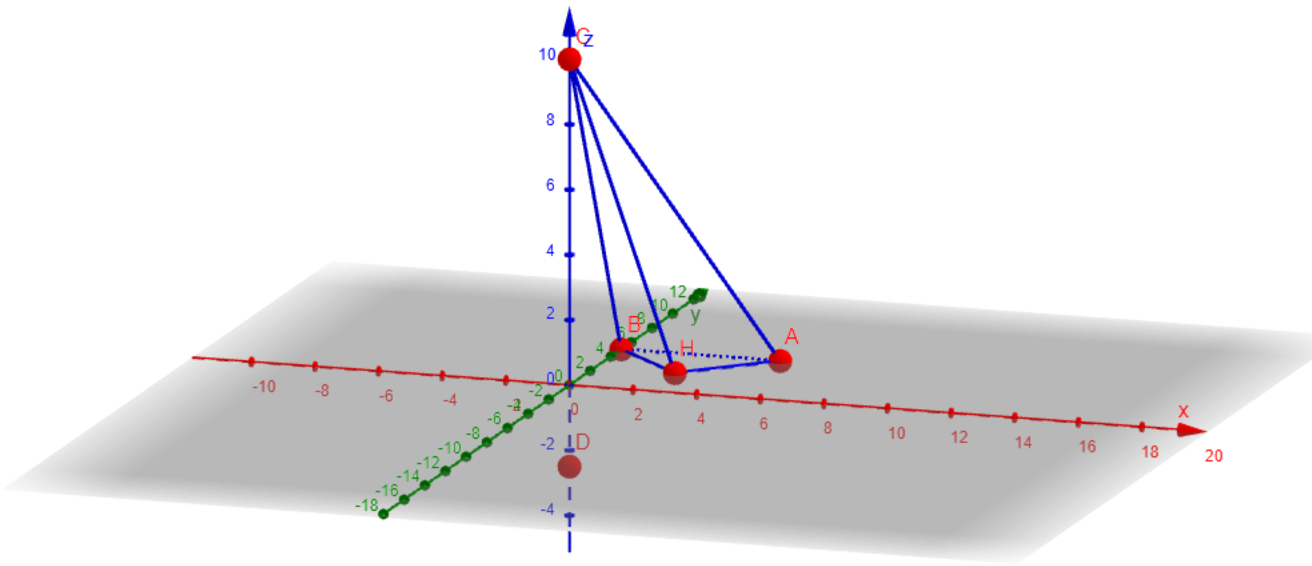
• On considère les points :

∘ $A(5;5;0)$

∘ $B(0;5;0)$

∘ $C(0;0;10)$

∘ $D(0;0;-\frac{5}{2})$



Question 01 :

Q01-a :

Montrer que $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD).

• Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}+5-(+0)=+5\\+5-(+0)=+5\\+0-(+10)=-10\end{pmatrix}$ Et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}+0-(+0)=+0\\+0-(+0)=+0\\-\frac{5}{2}-(+10)=-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$ Proportion $\begin{pmatrix}+5*0=0\\+5*0=0\\-10*=-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$ $k=0$

DONC $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont non colinéaires. ou produit en croix : $(+5*0)\div+5=0$ et $(+5*-\frac{25}{2})\div-10=$

D'une part $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{CA}=1*(5)-1*(5)+0*(+10)=0\Rightarrow\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.

D'autre part $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{CD}=1*(0)-1*(0)+0*(-\frac{25}{2})=0\Rightarrow\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

AINSI $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaire du plan CAD

DONC $\overrightarrow{n_1}$ est un vecteur normal au plan CAD.

Q01-b :

En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x-y=0$.

• L'équation cartésienne d'un plan est de type $ax+by+cz+d=0$ avec a,b,c, les coordonnées de $\overrightarrow{n_1}$

$\Rightarrow(1)x+(-1)y+(0)z+d\Rightarrow x-y+d=0$

• On sait que le point C appartient au plan CAD

DONC $x_C-y_C+d=0\Rightarrow d=0$

• Le plan (CAD) a pour équation cartésienne $x-y=0$

Question 02 :

On considère la droite D de représentation cartésienne $\begin{cases}x=\frac{5}{2}t\\y=5-\frac{5}{2}t\\z=0\end{cases}$ avec $t\in\mathscr{R}$

Q02-a :

On admet que la droite D et le plan (CAD) sont sécants en un point H.

Justifier que les coordonnées de H sont $(\frac{5}{2};\frac{5}{2};0)$.

• la droite D et le plan (CAD) sécant en H on obtient le système de quatre équations suivant :

$$\begin{cases}x_H=\frac{5}{2}t\\y_H=5-\frac{5}{2}t\\z_H=0\\x_H-y_H=0\Rightarrow x_H=y_H\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_H=\frac{5}{2}t\\y_H=5-\frac{5}{2}t\Rightarrow\frac{5}{2}t=5-\frac{5}{2}t\Rightarrow t=1\\z_H=0\\x_H-y_H=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_H=\frac{5}{2}\\y_H=\frac{5}{2}\\z_H=0\\x_H-y_H=0\end{cases}$$

• Les coordonnées de $H(\frac{5}{2};\frac{5}{2};0)$

Q02-b :

Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD) .

• On a $\overrightarrow{HB}(\frac{5}{2};\frac{5}{2};0)$

• On remarque que les coordonnées de $\overrightarrow{HB}(-\frac{5}{2};\frac{5}{2};0)$ et $\overrightarrow{n_1}(1;-1;0)$ sont **proportionnelles**

DONC $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{n_1}$ sont **colinéaires**.

DE PLUS, H appartient au plan (CAD) d'après la question précédente.

AINSI, H est bien le projeté orthogonal de B sur la plan (CAD).

Question 03 :

Q03-a :

Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.

• On a $\overrightarrow{AH}(-\frac{5}{2};\frac{5}{2};0)$ et $\overrightarrow{HB}(-\frac{5}{2};\frac{5}{2};0)$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, ils définissent donc bien un plan. • $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HB}=-\frac{5}{2}*(-\frac{5}{2})-\frac{5}{2}*\frac{5}{2}+0=0$

DONC $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{HB}$sont orthogonaux

AINSI Le triangle AHB est rectangle en H

Q03-b :

En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\frac{25}{4}$.

• En prenant AH comme base du triangle AHB, on aura pour hauteur issue de B HB étant donné que AHB est rectangle en H.

DONC $\mathscr{A}_{AHB}=\frac{AH*HB}{2}$

OR, $AH=\sqrt{(-\frac{5}{2})^2+(-\frac{5}{2})^2+0^2}=\frac{5}{\sqrt{2}}$ Et $HB=\sqrt{(-\frac{5}{2})^2+(+\frac{5}{2})^2+0^2}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$

DONC $\mathscr{A}_{AHB}=\frac{1}{2}*\frac{5}{\sqrt{2}}*\frac{5}{\sqrt{2}}$

DONC L'aire du triangle AHB est bien égale à $\frac{24}{4}$

Question 04 :

Q04-a :

Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre $ABCH$ issue de C.

• On a $\overrightarrow{CO}(0;0;10)$

$\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{AH}=0*(-\frac{5}{2})+0*(\frac{5}{2})+10*0=0$ et $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{BH}=0*(-\frac{5}{2})+0*(\frac{5}{2})+10*0=0$

DONC (CO) est bien la hauteur du tétraèdre $(ABCH)$ issue de C .

Q04-b :

En déduire le volume du tétraèdre $ABCH$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V=\frac{1}{3}*B*H$

ou B est l'aire d'une base et H la hauteur relative à cette base.

• $\mathscr{V}_{ABCH}=\frac{1}{3}\mathscr{A}_{AHB}*CO$

OR $CO=\sqrt{0^2+0^2+10^2}=10$ DONC $\mathscr{V}_{ABCH}=\frac{1}{3}*\frac{25}{4}*10=\frac{125}{6}$.

Question 05 :

On admet que le triangle ABC est rectangle en B.

Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan $()ABC$.

• Notons d la distance recherchée.

On a $\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3}\mathscr{A}_{AHB} * d$

OR, ABC est rectangle en B, donc en prenant AB comme base, on aura BC pour hauteur issue de C du triangle ABC. Ainsi, $\mathscr{A}_{AHB} = AB * \frac{BC}{2}$

OR, on a $\overrightarrow{AB}(-5;0;0)$ et $\overrightarrow{BC}(0;-5;10)$

DONC $AC = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + 0^2} = 4$ Et $BC = \sqrt{(0)^2 + () - 5^2 + 10^2} = \sqrt{125} \Rightarrow \mathscr{A}_{ABC} = \frac{5 * \sqrt{125}}{2}$

AINSI $d = \frac{3\mathscr{V}_{ABCH}}{\mathscr{A}_{ABC}} = 3 * \frac{125}{6} * \frac{2}{5 * \sqrt{125}} = \frac{\sqrt{125}}{5} = \sqrt{5}$

DONC La distance du point H au plan (ABC) est égale à $\sqrt{5}$ (soit environ 2.24).

Chapitre 4

Session 2025

4.1. ÉNONCÉ (4 POINTS)

• Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

• Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

• On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\,)$

Question 01 :

On concidére les points $A(-1;0;5)$ et $B(3;2;-1)$.

Q01-a :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est . $\begin{cases} x = +3-2t \\ y = +2-1t \\ z = -1+3t \end{cases}$ avec $t \in \mathscr{R}$

• Une représentation paramétrique d'une droite est caractérisée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et son vecteur directeur $\vec{u}$.

• Calcul du vecteur directeur $\vec{u}$ $\begin{pmatrix} +3-(-1) = +4 \\ +2-(+0) = +2 \\ -1-(+5) = -6 \end{pmatrix}$

• Interprétons la représentation paramétrique $\begin{cases} x = +3-2t \\ y = +2-1t \\ z = -1+3t \end{cases}$ avec $t \in \mathscr{R}$

∘ Le points $A(3;2;-1)$ de la droite (AB)

∘ Le vecteur directeur $\vec{u}$ Produit en croix $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \dfrac{(4*-1)}{2} = -2$ et $\dfrac{(2*3)}{-6} = -1 \Rightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

DONC $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ colinéaires car proportionnelles.

DONC La représentation paramétrique de la droite AB est $\begin{cases} x = +3-2t \\ y = +2-1t \\ z = -1+3t \end{cases}$

Q01-b :

Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} +5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB)

• Pour vérifier qu'un vecteur est normal au plan (OAB), il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan. Ici, on peut prendre :

• $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n}.\overrightarrow{OA} = (5)*(-1)+(-2)*(0)+(1)*(5) = -5+0+5 = 0$

• $\overrightarrow{OB} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n}.\overrightarrow{OA} = (5)*(3)+(-2)*(2)+(1)*(-1) = -15-4-1 = 10 \neq 0$

DONC $\overrightarrow{n}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{OB} \Rightarrow$ ce n'est pas un vecteur normal au plan (OAB) .

Question 02 :

• La droite d de représentation paramétrique. $\begin{cases} x = +15+k \\ y = 8-k \\ z = -6+2k \end{cases}$ avec $t \in \mathscr{R}$

• La droite d' de représentation paramétrique. $\begin{cases} x = 1+4s \\ y = 2+4s \\ z = 1-6sk \end{cases}$ avec $t \in \mathscr{R}$

• Les droites ne sont pas coplanaire

• On a :

∘ vecteur directeur de d : $\overrightarrow{u} = (1;-1;2)$

∘ vecteur directeur de d' : $\overrightarrow{v} = (4;4;-6)$

• On vérifie si les deux vecteurs sont colinéaires (proportionnelles)

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \dfrac{(1*4)}{-1} = -4$ et $\dfrac{(-1*-6)}{2} = 3$

DONC les vecteurs ne sont pas colinéaires $\Rightarrow$ les droites d et d' ne sont pas parallèles.

• On regarde maintenant si les droites sont sécantes.

DONC On cherche s'il existe k et s tels que les deux droites passent par le même point.

DONC On pose donc les équations : $\begin{cases} 15+k = 1+4s \\ 8-k = 2+4s \\ -6+2k = 1-2s \end{cases}$

$15+k = 1+4s \Rightarrow k = -14+4s$ ET

On remplace s par k $8-k = 2+4s \Rightarrow 8-(-14+4s) = 2+4s \Rightarrow 22-4s = 2+4s \Rightarrow 20 = 8s \Rightarrow s = 2.5$

On déduit $k = -14+4*2.5 = 4$

• Vérifions maintenant que ces valeurs conviennent aussi pour la 3e équation :

$-6+2k = 1-6s$ Gauche $-6+2*(-4) = -6-8 = -14$ Droite $1-6*2.5 = 1-15 = -14 \Rightarrow$ Le système est compatible.

DONC les deux droites se coupent en un point $\Rightarrow$ elles sont sécantes, donc coplanaires.

Question 03 :

• On considère le plan P d'équation cartésienne $x-y+z+1=0$.

• La distance du point $C(2;-1;2)$ au plan P est égale à $2\sqrt{3}$

• On cherche le point H, projeté orthogonal de C sur le plan. La droite orthogonale au plan passant par C a pour direction le vecteur normal $(1;-1;1)$

DONC $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1-t \\ z=2+t \end{cases}$

• On cherche t tel que ce point soit dans le plan :

$(x)-(y)+(z)+1=0 \Rightarrow (2+t)-(-1-t)+(2+t)+1=0 \Rightarrow 6+3t=0 \Rightarrow t=-2$

DONC $H=(0;1;0)$ et Distance $CH=||\overrightarrow{CH}||=\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(2)^2}\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

DONC La distance CH est égale à $2\sqrt{3}$.

Fin de session.