



WP-CMS

**Mathématiques**

# **BACCALAURÉAT - MATHÉMATIQUES**

**Probabilités**

**Sessions : 2022 - 2023 - 2024 - 2025 - 2026**



# Table des matières

|          |                             |           |
|----------|-----------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Session 2022</b>         | <b>3</b>  |
| 1.1      | Énoncé : 7 points . . . . . | 3         |
| <b>2</b> | <b>Session 2023</b>         | <b>7</b>  |
| 2.1      | Énoncé : 5 points . . . . . | 7         |
| <b>3</b> | <b>Sessions 2024</b>        | <b>10</b> |
| 3.1      | Énoncé : 5 points . . . . . | 10        |
| <b>4</b> | <b>Session 2025</b>         | <b>15</b> |
| 4.1      | Énoncé . . . . .            | 15        |

# Chapitre 1

## Session 2022

### 1.1. ÉNONCÉ : 7 POINTS

---

- Le directeur d'une grande entreprise a proposé à l'ensemble de ses salariés un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel.
- Ce stage a été suivi par 25% des salariés.
- Dans cette entreprise, 52% des salariés sont des **femmes**, parmi lesquelles 40% ont suivi le **stage**.
- On interroge au **hasard** un salarié de l'entreprise et on considère les **événements** :
  - $F$  : le salarié interrogé est une femme,
  - $S$  : le salarié interrogé a suivi le stage.
  - $\bar{F}$  et  $\bar{S}$  désignent respectivement les événements contraires des événements  $F$  et  $S$

**Question 01 :**

**Q1-a :**

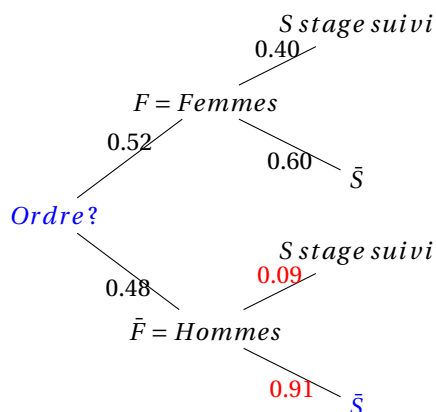
Donner la probabilité de l'événement  $S$

On nous précise que 25% des salariés ont suivi le stage.

Donc  $P(S) = 0,25$

**Q1-b :**

Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-contre sur les quatre branches indiquées.



**Q1-c :**

Démontrer la probabilité que l'interrogée soit une femme ayant suivi le stage est égale à 0,208

On cherche à calculer la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage, ce qui revient à calculer la probabilité :  $P(F \cap S)$

$$P(F \cap S) = P(F) * P_f(S) = 0.52 * 0.40 \approx 0.208$$

Donc La probabilité est  $P(F \cap S) \approx 0.208$

**Q1-d :**

On sait que la personne interrogée a suivi le stage. Quelle est la probabilité que ce soit une femme?

On cherche la probabilité que la personne soit une femme, sachant qu'elle a suivi le stage. Ce qui revient à calculer la probabilité  $P_s(F)$

Or, d'après la formule de Bayes : 
$$P_s(F) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{P(F) * P_f(S)}{P(S)}$$

Donc, 
$$P_s(F) = \frac{0.208}{0.25} = 0.832$$

**Q1-e :**

Le directeur affirme que, parmi les hommes salariés de l'entreprise, moins de 10% ont suivi le stage. Justifier l'affirmation du directeur.

On sait que, d'après la loi des probabilités totales,

$$P(S) = P(F \cap S) + P(\bar{F} \cap S) = P(F \cap S) + P(\bar{F})P_{\bar{F}}(S)$$
$$\Rightarrow P_{\bar{F}}(S) = \frac{P(S) - P(F \cap S)}{P(\bar{F})} = \frac{0.25 - 0.208}{0.48} = 0.09$$

La part d'hommes ayant suivi le stage étant de 9%, l'affirmation du directeur est vraie.

**Question 02 :**

WP-CMS

On note  $X$  la **variable aléatoire** qui à un **échantillon** de 20 salariés de cette entreprise choisis au **hasard** associe le nombre de salariés de cet échantillon ayant suivi le stage. On suppose que l'effectif des salariés de l'entreprise est suffisamment important pour assimiler ce choix à un **tirage avec remise**.

**Q2-a :**

Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire  $X$ .

On prend un **échantillon** de 20 salariés, et on étudie le suivi du stage dans cet échantillon supposé être un **tirage avec remise**. La **variable aléatoire**  $X$  mesure donc le nombre de salariés ayant suivi le stage dans cet échantillon de 20, et suit alors la loi binomiale de paramètres  $n = 20$  et  $p = 0.25$ .

Donc,  $X \sim \beta(20; 0.25)$

**Q2-b :**

Déterminer, à  $10^{-3}$  près, la probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

La probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage

On pose la loi binomiale  $P(X = 5) = \binom{20}{5} * 0.25^5 * 0.75^{15} \approx 0.202$

La probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage est de 20,2%

**Q2-c :**

Le programme ci-contre, écrit en langage Python, utilise la fonction binomiale  $\beta(i, n, p)$  créée pour l'occasion qui renvoie la valeur de la probabilité  $P(X = i)$  dans le cas où la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

Déterminer, à  $10^{-3}$  près, la valeur renvoyée par ce programme lorsque l'on saisit `proba(5)` dans la console Python. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice. `def proba(k)`

```
P = 0
```

```
→ for i in range (0, k + 1) :
```

```
→ P = P + binomiale(i, 20, 0.25)
```

```
→ Return P
```

En saisissant `proba(5)` dans la console **Python**, le programme renvoie 0,617. On remarque que le programme Python ainsi écrit somme les  $P(X = i)$  de 0 à  $k \in \mathcal{N}$  donnant alors la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$ . Autrement dit, `proba(5)` donne la probabilité  $P(X \leq 5)$  qu'au plus 5 salariés aient suivi le stage sur les 20.

Donc,  $P(X \leq 5) = 0,617$ .

**Q2-d :**

Déterminer, à  $10^{-3}$  près, la probabilité qu'au moins 6 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

La probabilité qu'au moins 6 salariés aient suivi le stage correspond à la probabilité

On pose la loi binomiale  $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5)$

Donc,  $P(X \geq 6) = 1 - 0.617 \approx 0,383$

La probabilité qu'au moins 6 salariés aient suivi le stage est de 38,3%

**Question 03 :**

WP-CMS

Cette question est indépendante des questions 1 et 2.

Pour inciter les salariés à suivre le stage, l'entreprise avait décidé d'augmenter les salaires des salariés ayant suivi le stage de 5%, contre 2% d'augmentation pour les salariés n'ayant pas suivi le stage. Quel est le pourcentage moyen d'augmentation des salaires de cette entreprise dans ces conditions?

On sait que 25% des salariés ont suivi le stage. Ces derniers étant augmentés à hauteur de 5%; les 75% restants étant augmentés à hauteur de 2%, il vient l'augmentation moyenne :

$$A_r = 0,25 * 0.05 + 0,75 * 0.02 = 0.275$$

L'augmentation totale moyenne sera donc de  $A_r = 2,8\%$

# Chapitre 2

## Session 2023

### 2.1. ÉNONCÉ : 5 POINTS

- Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

- Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse inexacte.

- Les questions sont indépendantes.

Un technicien contrôle les machines équipant une grande entreprise. Toutes ces machines sont identiques.

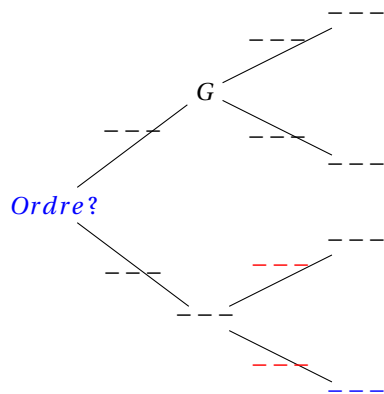
On sait que :

- 20% des machines sont sous garantie;
- 0,2% des machines sont à la fois défectueuses et sous garantie;
- 8,2% des machines sont défectueuses.

Le technicien teste une machine au hasard.

On considère les événements suivants :

- $G$  la machine est sous garantie
- $D$  la machine est défectueuse
- $\bar{G}$  et  $\bar{D}$  désignent respectivement les événements contraires de  $G$  et  $D$ .

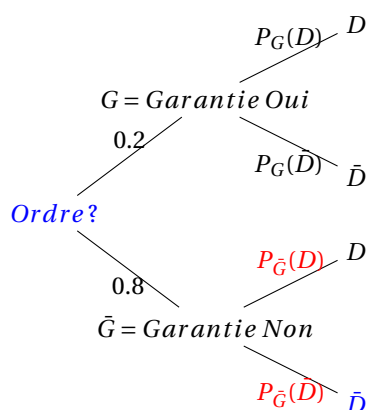


**Question 01 :**

La probabilité  $P_G(D)$  de l'événement  $D$  sachant que  $G$  est réalisé est égale à :

| a     | b    | c     | d   |
|-------|------|-------|-----|
| 0.002 | 0.01 | 0.024 | 0.2 |

D'après les données, on peut à l'avance établir l'arbre pondéré suivant :



On sait de plus que  $P(G \cap D) = 0.002$  et  $P(D) = 0.082$

Par définition d'une probabilité conditionnelle :  $P_G(D) = \frac{P(G \cap D)}{P(G)}$

Donc,  $P_G(D) = \frac{0,2}{20} = 0,01 \Rightarrow$  Réponse B

**Question 02 :**

La probabilité  $P(\bar{G} \cap D)$  est égale à :

| a    | b    | c   | d    |
|------|------|-----|------|
| 0.01 | 0.08 | 0.1 | 0.21 |

Puisque  $G, \bar{G}$  forme un système complet d'événements (ou une partition de l'univers), la formule des probabilités totales nous dit que :  $P(D) = P(D \cap G) + P(D \cap \bar{G})$

$\Rightarrow P(D \cap \bar{G}) = P(D) - P(D \cap G) = 0,082 - 0.002 = 0.08$

$P(D \cap \bar{G}) = 0.08 \Rightarrow$  Réponse B

**Question 03 :**

La machine est défectueuse. La probabilité qu'elle soit sous garantie est environ égale, à  $10^{-3}$  près, à :

| a    | b     | c     | d   |
|------|-------|-------|-----|
| 0.01 | 0.024 | 0.082 | 0.1 |

On cherche  $P_D(G)$ . Par définition d'une probabilité conditionnelle :  $P_D(G) = \frac{P(G \cap D)}{P(D)}$

Donc,  $P_D(G) = \frac{0,2}{8,2} = 0.0244 \approx 0.024 \Rightarrow$  Réponse B

Pour les questions 4 et 5, on choisit au hasard et de façon indépendante  $n$  machines de l'entreprise, où  $n$  désigne un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un **tirage avec remise**, et on désigne par  $X$  la **variable aléatoire** qui associe à chaque lot de  $n$  machines le nombre de machines défectueuses dans ce lot.

On admet que  $X$  suit la **loi binomiale** de paramètres  $n$  et  $p = 0.082$ .

**Question 04 :**

Dans cette question, on prend  $n = 50$ . La valeur de la probabilité  $P(X > 2)$ , arrondie au millièème, est de :

| a     | b     | c     | d     |
|-------|-------|-------|-------|
| 0.136 | 0.789 | 0.864 | 0.924 |

D'après le cours sur les lois binomiales, SI  $X \sim \beta(50; 0.082)$  ALORS  $P(X = k) = \binom{N}{K} * P^K * (1 - p)^{n-k}$

Ici, en utilisant les événements contraires

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \text{ CAR } X(\Omega) = 0, 1, 2, \dots, 50.$$

Arrivé ici, il y a 2 possibilités.

Soit on utilise la calculatrice et :

- fonction de partition pour  $X = 0$ ,  $X = 1$ , et  $X = 2$

- fonction de répartition pour  $X \leq 2$

Dans les deux cas, on trouve

$$- P(X > 2) \approx 0.78858 \approx 0.759 \text{ Ainsi}$$

$$- P(X > 2) = 1 - (1 - 0.082)^{50} - 50 * 0.082 * (1 - 0.082)^{49} = 0.78858 \approx 0.759$$

$$P(X > 2) = 0.78858 \approx 0.759 \Rightarrow \text{Réponse B}$$

**Question 05 :**

On considère un entier  $n$  pour lequel la probabilité que toutes les machines d'un lot de taille  $n$  fonctionnent correctement est supérieure à 0.4. La plus grande valeur possible pour  $n$  est égale à :

| a | b | c  | d  |
|---|---|----|----|
| 5 | 6 | 10 | 11 |

On cherche désormais  $n$  tel que SI  $P(X = 0) > 0.4$  ou  $X \sim \beta(n; 0.082)$  OR

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} * 0.082^0 * (1 - 0.082)^n = (1 - 0.082)^n$$

On doit donc résoudre :  $(1 - 0.082)^n > 0.4$

$$(1 - 0.082)^n > 0.4 \Leftrightarrow n \ln(1 - 0.082) > \ln(0.4)$$

par application de la fonction  $\ln$ , strictement croissante sur  $\mathcal{R}^+$ . Ainsi

$$n \ln(0.918) > \ln(0.4) \Leftrightarrow n < \frac{\ln(0.4)}{\ln(0.918)} \text{ changement du sens de l'inégalité car } \ln(0.918) < 0$$

Après calculs  $n < 10,7 \Leftrightarrow n \leq 10 \Rightarrow \text{Réponse c}$

# Chapitre 3

## Sessions 2024

### 3.1. ÉNONCÉ : 5 POINTS

---

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur.

★ Les achats sur internet représentent 60% des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30% des ventes et ceux en grandes surfaces 10% des ventes.

★ Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

- 75% pour les clients sur internet;
- 90% pour les clients en magasin d'électroménager;
- 80% pour les clients en grande surface.

★ On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné.

★ On définit les événements suivants :

- $I$  le client a effectué son achat sur internet
- $M$  le client a effectué son achat en magasin d'électroménager
- $G$  le client a effectué son achat en grande surface
- $S$  le client est **satisfait** du service clientèle

**Question 01 :**

- Pour un **événement** quelconque  $E$ , on note  $\bar{E}$  l'**événement contraire** de  $E$  et  $P(E)$  la **probabilité** de  $E$ .
- Compléter l'**arbre de probabilité** en remplaçant les pointillés par données de l'énoncé.

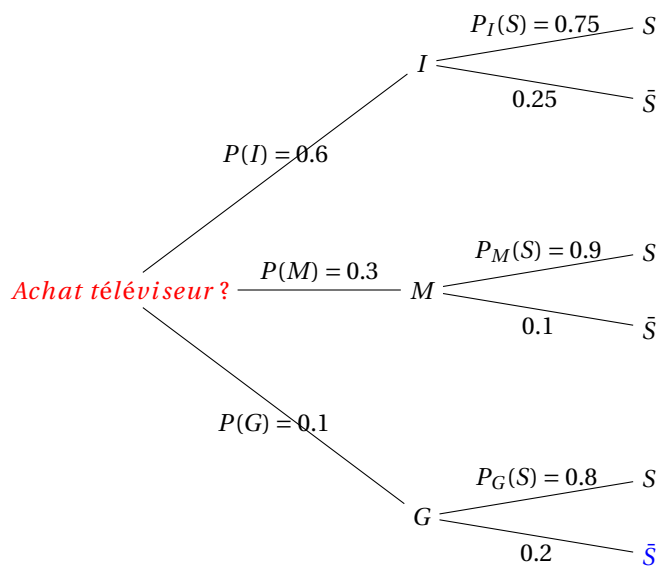
**D'après l'énoncé :**

$$P(I) = 0.6; P(M) = 0.3; P(G) = 0.1; \parallel P_I(S) = 0.75; P_M(S) = 0.9; P_G(S) = 0.8;$$

**Par le calcul on obtient :**

$$P_I(\bar{S}) = 1 - P_I(S) = 1 - 0.75 = 0.25 \parallel P_M(\bar{S}) = 1 - P_M(S) = 1 - 0.9 = 0.1 \parallel P_G(\bar{S}) = 1 - P_G(S) = 1 - 0.8 = 0.2 \parallel$$

On peut donc compléter l'arbre pondéré comme ceci :



**Question 02 :**

Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.

On cherche  $P(I \cap S)$   $I$  achat sur internet et  $S$  client satisfait.

$$P(I \cap S) = P(I) * P_I(S) = 0.6 * 0.75 = 0.45$$

La probabilité que la client ait réalisé son achat sur Internet et qu'il soit satisfait du service client et de 45%.

**Question 03 :**

Démontrer que  $P(S) = 0.8$ .

$I$ ,  $M$  et  $G$  forment un système complet d'événements.

Donc, d'après la formule des probabilités totales :  $P(S) = P(I \cap S) + P(M \cap S) + P(G \cap S)$

$$\Rightarrow P(S) = P(I \cap S) + P_M(S)P(M) + P_G(S)P(G) \Rightarrow P(S) = 0.45 + 0.9 * 0.3 + 0.8 * 0.1 = 0.8$$

On a démontré que  $P(S) = 0.8$  la formule des probabilités totales.

**Question 04 :**

Un client est satisfait du service clientèle. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet?

On donnera un résultat arrondi à  $10^{-3}$  près.

$$\text{On cherche } P_S(I) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)} \Rightarrow P_S(I) = \frac{0,45}{0.8} = 0.563$$

La probabilité que le client ait fait son achat sur Internet sachant qu'il est satisfait du service client est d'environ 0.563.

**Question 05 :**

Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un **tirage avec remise**. On note  $X$  la **variable aléatoire** qui, à chaque **échantillon** de 30 clients, associe le **nombre de clients satisfaits** du service clientèle.

**Q5-a :**

Justifier que  $X$  suit une **loi binomiale** dont on précisera les **paramètres**.

- Appeler un client pour savoir s'il est satisfait du service client est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « **le client est satisfait** » de probabilité  $P(S) = 0.8$ .
- On répète 30 fois cette épreuve de façon identique et indépendante (on suppose que le choix du client est assimilable à un tirage avec remise).

**DONC** un schéma de Bernoulli de paramètres  $n = 30$  et  $p = 0.8$ .

- La variable aléatoire  $X$  qui compte le nombre de **succès** (le nombre de clients satisfaits sur la journée)

**DONC** La probabilité que le client soit satisfait de son achat suit donc la loi binomiale  $X \sim \beta(30; 0.8)$

**Q5-b :**

Déterminer la **probabilité**, arrondie à  $10^{-3}$  près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.

On cherche  $P(x \geq 25)$

**Question 06 :**

En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0.99

- Soit  $n$  la taille minimale de l'échantillon et  $Y$  la **variable aléatoire** qui, sur ces  $n$  clients contactés en une journée, compte le nombre de **clients non satisfaits**.
- Appeler un client pour savoir s'il est satisfait du service client est une **épreuve de Bernoulli** dont le succès est « le client n'est pas satisfait » de probabilité  $P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 0.2$
- La variable aléatoire  $Y$  qui compte le nombre de succès (le nombre de clients non satisfaits sur la journée) suit donc **la loi binomiale**

$$Y \sim \beta(n; 0.2).$$

- On cherche  $n$  tel que  $P(Y \geq 1) \geq 0.99$   $\circ P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0)$ . Pour faciliter les calculs on prend l'événement contraire.

$$\circ \text{ Comme } Y \sim \beta(n; 0.2) \text{ on a } P(Y \geq 1) = 1 - \binom{n}{0} * 0.2^0 * (1 - 0.2)^{n-0} = 1 - 0.8^n$$

$$\circ \text{ On cherche donc } n \text{ tel que } 1 - 0.8^n \geq 0.99$$

$$\circ \text{ Pour tout } n \in \mathcal{N}, 1 - 0.8^n \geq 0.99 \Leftrightarrow 0.8^n \leq 1 - 0.99 \Leftrightarrow \ln(0.8^n) \leq \ln(0.01)$$

car fonction  $\ln$  est croissante sur  $\mathcal{R}^+$

$$\Leftrightarrow n \ln(0.8) \leq \ln(0.01) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.8)}$$

car  $\ln(0.8) < 0$  car  $0.8 < 1$

Donc  $n \in \mathcal{N}$ , il faut  $n \geq 21$

Il faut donc appeler au minimum 21 clients sur une même journée pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure ou égale à 0.99.

**Question 07 :**

Dans les deux questions *a.* et *b.* qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet. Lorsque'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une **variable aléatoire**  $T$  égale à la somme de deux variables aléatoires  $T_1$  et  $T_2$

La variable aléatoire  $T_1$  modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution. La variable aléatoire  $T_2$  modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.

On admet que les variables aléatoires  $T_1$  et  $T_2$  sont indépendantes, et on donne : L'espérance  $E(T_1) = 4$  et la variance  $V(T_1) = 2$  L'espérance  $E(T_2) = 3$  et la variance  $V(T_2) = 1$

**Q7-a :**

Déterminer l'espérance  $E(T)$  et la variance  $V(T)$  de la variable aléatoire  $T$ .

- Par linéarité de l'espérance, on a :  $E(T) = E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2)$

$$\text{Donc, } E(T) = 4 + 3 = 7.$$

- Les variables aléatoires  $T_1$  et  $T_2$  sont indépendantes donc  $V(T) = V(T_1 + T_2) = V(T_1) + V(T_2)$

$$\text{Donc, } V(T) = 2 + 1 = 3.$$

**Q7-b :**

WP-CMS

Un client passe une commande de téléviseur sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à  $\frac{2}{3}$

• On cherche  $P(5 \leq T \leq 9) = P(-2 \leq T - E(T) \leq 2) = P(|T - E(T)| \leq 2)$

Ainsi  $P(5 \leq T \leq 9) = 1 - P(|T - E(T)| > 2) = 1 - P(|T - E(T)| \geq 3)$  car  $T - E(T)$  ne prend que des valeurs entières.

• D'après l'inégalité de **Bienaymé-Tchebychev**  $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$

on a  $P(|T - E(T)| \geq 3) \leq \frac{V(T)}{3^2}$

D'où :  $P(|T - E(T)| \geq 3) \leq \frac{1}{3}$ .

Ainsi on a bien  $P(5 \leq T \leq 9) \geq \frac{2}{3}$

La probabilité que le téléviseur soit reçu entre 5 et 9 jours après la commande est supérieure ou égale à  $\frac{2}{3}$

# Chapitre 4

## Session 2025

### 4.1. ÉNONCÉ

---

- On compte quatre groupes sanguins dans l'espèce humaine :  $A$ ,  $B$ ,  $AB$  et  $O$
- Chaque groupe sanguin peut présenter un facteur rhésus. Lorsque'il est présent, on dit que le rhésus est positif, sinon on dit qu'il est négatif.
- Au sein de la population française, on sait que :
  - 45% des individus appartiennent au groupe  $A$ , et parmi eux 85% sont de rhésus positif;
  - 10% des individus appartiennent au groupe  $B$ , et parmi eux 84% sont de rhésus positif;
  - 3% des individus appartiennent au groupe  $AB$ , et parmi eux 82% sont de rhésus positif;
- On choisit au hasard une personne dans la population française.
- On désigne par :
  - $A$  l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin  $A$  »;
  - $B$  l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin  $B$  »;
  - $AB$  l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin  $AB$  »;
  - $O$  l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin  $O$  »;
  - $R$  l'évènement « La personne choisie a un facteur rhésus positif »;

**Question 01 :**

- Pour un événement quelconque  $E$ , on note  $\bar{E}$  l'événement contraire de  $E$  et  $P(E)$  la probabilité de  $E$ .
- Compléter l'arbre de probabilité en remplaçant les pointillés par données de l'énoncé.

**D'après l'énoncé :**

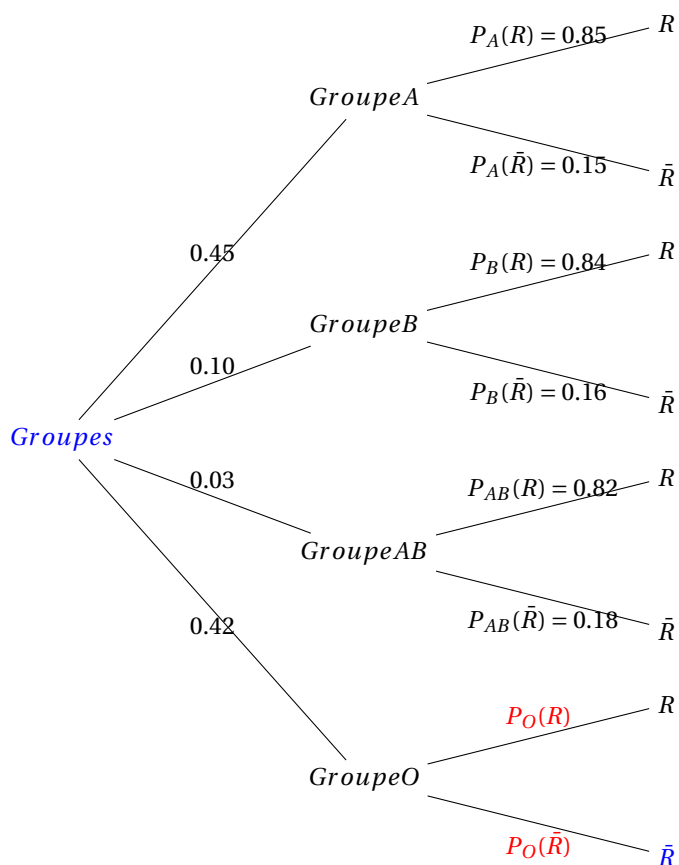
$$P(A) = 0.45; P(B) = 0.10; P(AB) = 0.03; P_O = 1 - (0.45 + 0.10 + 0.03) = 0.42$$

$$\text{et } P_A(R) = 0.85; P_B(R) = 0.84; P_{AB}(R) = 0.82$$

**Par le calcul on obtient :**

$$P_A(\bar{R}) = 1 - 0.85 = 0.15; P_B(\bar{R}) = 1 - 0.84 = 0.16; P_{AB}(\bar{R}) = 1 - 0.82 = 0.18$$

On peut donc compléter l'arbre de probabilité comme ceci :



**Question 02 :**

Montrer que  $P(B \cap R) = 0.084$ . Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

On cherche  $P(B \cap R) \Rightarrow P(B) * P_B(R) = 0.10 * 0.84 = 0.084$

Cela signifie que : 8.4% des personnes dans la population française sont de groupe sanguin B et ont un rhésus positif.

**Question 03 :**

On précise que  $P(R) = 0.8397$ . Montrer que  $P_O(R) = 0.83$

On utilise la formule des probabilités totales :  $P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(AB \cap R) + P(O \cap R)$

$$\Rightarrow P(O \cap R) = P(R) - [P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(AB \cap R)]$$

$$\Rightarrow P(O \cap R) = 0.8397 - [(0.45 * 0.85) + (0.10 * 0.84) + (0.03 * 0.82)]$$

$$\Rightarrow P(O \cap R) = 0.8397 - [0.3825 + 0.084 + 0.0246] = 0.3486$$

$$\text{Donc, } P_O(R) = \frac{P(O \cap R)}{P(O)} = \frac{0.3486}{0.42} = 0.83$$

**Question 04 :**

On dit qu'un individu est « donneur universel » lorsque son sang peut être transfusé à toute personne sans risque d'incompatibilité. Le groupe O de rhésus négatif est le seul vérifiant cette caractéristique. Montrer que la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel est de 0.0714.

Un donneur universel est une personne de groupe O et de rhésus négatif, donc on cherche :

$$P(O \cap \bar{R}) = P(O) * P_O \bar{R}$$

Précédemment on a trouvé :  $P_O(R) = 0.83$  MAIS on cherche l'événement contraire  $P_O \bar{R} = 1 - 0.83 = 0.17$

$$\text{Donc } P(O \cap \bar{R}) = 0.42 * 0.17 = 0.0714$$

**Question 05 :**

Lors d'une collecte de sang, on choisit un **échantillon** de 100 personnes dans la population d'une ville française. Cette population est suffisamment grande pour assimiler ce choix à **un tirage avec remise**. On note  $X$  la **variable aléatoire** qui à chaque échantillon de 100 personnes associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

**Q01-a :**

Justifier que  $X$  suit **une loi binomiale** dont on précisera les **paramètres**.

On effectue un tirage avec remise de 100 personnes. Chaque personne a une probabilité  $p = 0.714$  d'être donneur universel.

$$\text{Donc } X \sim \beta(100, 0.0714)$$

**Q01-b :**

Déterminer à  $10^{-3}$  près la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon.

On veut  $P(X \leq 7)$  sachant  $X \sim \beta(100, 0.0714)$ . Avec une calculatrice on obtient :

**SOIT**, on somme les 8 résultats issus du calcul de la formule de la loi binomiale avec  $K = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ et } 7$ .

Rappel de la formule :  $P(X = K) = \binom{n}{K} * P_{succes}^K * (1 - P)_{echec}^{n-K}$  Avec  $\binom{n}{K} = \frac{n!}{K! * (n-K)!}$

**SOIT**, on utilise la calculette GASIO GRAPH95

Menu 1 | EXE | OPTN | F5 (stat)|F3 (DIST) | F5 (BINM) | F2 (BCD)| Binomial (7,100,0.0714) | EXE  $\Rightarrow 0.5771$

$$P(X \leq 7) \approx 0,577$$

**Q01-c :**

Montrer que de la variable aléatoire  $X$  à pour : - **espérance**  $E(X)$  égale à 7.14 - **variance**  $V(X)$  égale à 6.63 à  $10^{-2}$  près.

**Q05-c :**

- Calcul de l'espérance  $E(X) = n * p = 100 * 0.0714$
- Calcul de la variance  $V(X) = n * p * (1 - p) \approx 6,63$

**Question 06 :**

- Lors de la semaine nationale du don du sang, une collecte de sang est organisée dans  $N$  villes françaises choisies au hasard numérotées 1, 2, 3, ...,  $N$  où  $N$  est un entier naturel non nul.
- On considère la variable aléatoire  $X_1$  qui à chaque échantillon de 100 personnes de la ville 1 associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.
- On définit de la même manière les variables aléatoires  $X_2$  pour la ville 2, ...,  $N$  pour la ville  $N$ .

On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles admettent la même espérance égale à 7.14 et la même variance égale à 6,63.

On considère la variable aléatoire  $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$

**Q06-a :**

Que représente la variable aléatoire  $M_N$  dans le contexte de l'exercice ?

$M_N$  est la **moyenne du nombre de donneurs universels** par ville. Elle représente donc le nombre moyen de donneurs universels pour un échantillon de 100 personnes dans une ville, en moyenne sur les  $N$  villes.

**Q06-b :**

Calculer l'espérance  $E(M_N)$ .

L'espérance est :  $E(M_N) = \frac{E(X_1) + \dots + E(X_N)}{N} = \frac{N * 7.14}{N} = 7.14$

$$E(M_N) = 7.14$$

**Q06-c :**

On désigne par  $V(M_N)$  la variance de la variable aléatoire ( $M_N$ ). Montrer que  $V(M_N) = \frac{6.63}{N}$

Les  $X_i$  sont indépendantes avec même variance  $V(X_i) = 6.63$

Donc :  $V(M_N) = \frac{V(X_1) + \dots + V(X_N)}{N^2} = \frac{6.63}{N}$

$$V(M_N) = \frac{6.63}{N}$$

**Q06-d :**

Déterminer la plus petite valeur de  $N$  pour laquelle l'inégalité de Bienaymé Tchebychev permet d'affirmer que :  $P(7 < M_N < 7.28) \geq 0.95$

On veut  $P(7 < M_N < 7.28) \geq 0.95$

On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev  $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$

$$P(|M_N - E(M_N)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(M_N)^2}{\varepsilon}$$

ici,  $\varepsilon = 0.14$  donc  $1 - \frac{6.63}{N * 0.14^2} \geq 0.95 \Rightarrow \frac{6.63}{N * 0.0196} \leq 0.05$

$$\Rightarrow N \geq \frac{6.63}{0.05 * 0.0196} \approx 6765,3$$

Donc la plus petite valeur de  $N$  est 6766

WP-CMS