π

Mathématiques

BACCALAURÉAT - MATHÉMATIQUES

Suites numériques

Sessions : 2022 - 2023 -2024 - 2025 - 2026

Table des matières

Chapitre 1

Session 2022

1.1. Énoncé et réponses (7 points)

• Dans le cadre d'un essai clinique, on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie.

• L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

1.2. Partie A : Étude du premier protocole

1.3. Partie B : Étude du deuxième protocole

Partie B : Étude du deuxième protocole

• Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.
• On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
• On estime que lorsque'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30% par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
• On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, (u_n) désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ème heure. On a donc $u_0 = 2$.

Question 1

Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1 de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.

Au bout de la première heure, la quantité de médicament a diminué de 30% donc conservé 70%, mais d'autre part on a réinjecté 1,8mg.
Conclusion : $u_1 = 0.7 * u_0 + 1.8 = 0.7 * 2 + 1.8 = 3.2mg.$

Question 2

Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0.7u_n + 1,8$

SOIT $n \in \mathcal{N}$. À chaque heure, on sait que la quantité de médicament diminue de 30%. Il restera alors, à l'heure $(n+1)$, une quantité $0.7 * u_n$.
MAIS comme 1.8 mg sont réinjectés chaque heure,
Conclusion : $\forall n \in \mathcal{N}\ u_{n+1} = 0,7 * u_n + 1.8.$

Question 3

Question 3-a

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$

• Montrons par **récurrence** que $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$
• **Initialisation** :
POUR $n = 0$, on a $u_0 = 2$ ET $u_1 = 3.2$
ALORS $u_0 \leqslant u_1 < 6$. la propriété est vérifiée au rang 0.
• **Hérédité** :
Supposons la propriété vraie à un rang n quelconque, et montrons qu'elle reste vérifiée au rang $(n+1)$
On a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$
$\Leftrightarrow 0.7u_n \leqslant 0.7u_{n+1} < 0.7 * 6 \Leftrightarrow 0.7u_n + 1.8 \leqslant 0.7u_{n+1} + 1.8 < 0.7 * 6 + 1.8 \Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant 0.7u_{n+1} + 1.8 < 0.7 * 6 + 1.8$
ET COMME $0.7u_{n+1} = u_{n+2}$ ET $0.7 * 6 + 1.8 \approx 5.99 < 6$
DONC $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$ La propriété est donc vérifiée au rang $(n+1)$, elle est héréditaire.
Conclusion : La propriété étant vérifiée au rang zéro et héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n.

Question 3-b

En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.

• Nous avons, par récurrence, montré deux choses :

∘ Premièrement, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} \Rightarrow$ La suite (u_n) est donc **croissante**.

∘ Secondement, nous avons montré que pour tout entier naturel n, $u_n < 6$. $\Rightarrow$ La suite (u_n) est donc **majorée**.

Conclusion : la suite (u_n) étant **croissante** et **majorée**, ALORS elle est bien **convergente** de limite l.

Question 3-c

Déterminer la valeur de l. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Il vient alors très logiquement $l = 6$. Conclusion : quelle que soit la durée du traitement, la quantité de médicament présente da

Question 4

On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$

Question 4-a

Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0.7 dont on précisera le premier terme.

Soit $n \in \mathcal{N}$

On a $v_n = 6 - u_n$

ALORS $v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - (0.7u_n + 1.8) = -0.7u_n + 4.2 = 0.7(6 - u_n) = 0.7v_n$

ALORS finalement, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0.7v_n$.

Conclusion : La suite (v_n) est donc géométrique de **raison** $q = 0.7$ et premier terme $v_0 = 6 - u_0 = 6 - 2 = 4$.

Question 4-b

Déterminer l'expression de (v_n) en fonction de n, puis de (u_n) en fonction de n.

On a donc, pour la suite géométrique (v_n) : $\forall n \in \mathcal{N}$ $v_n = 4 * 0.7^n$.

Et finalement, comme $v_n = 6 - u_n \Leftrightarrow u_n 6 - v_n \Rightarrow$ $u_n = 6 - (4 * 0.7^n)$.

Question 4-c

Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5.5 mg.

Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

On cherche à savoir au bout de combien d'injections la quantité de médicament présente dans le sang sera supérieure à 5.5 mg.

Il va donc nous falloir résoudre, pour n entier naturel, $u_n \geqslant 5.5$.

Soit $n \in \mathcal{N}$

$u_n \geqslant 5.5. \Leftrightarrow 6 - 4 * 0.7^n \geqslant 5.5 \Leftrightarrow -4 * 0.7^n \geqslant -0.5 \Leftrightarrow +4 * 0.7^n \geqslant +0.5 \Leftrightarrow 0.7^n = \dfrac{0.5}{4} = 0.125$

$\Leftrightarrow e^{nln(0.7)} \leqslant 0.125 \Leftrightarrow nln(0.7) \leqslant ln(0.125) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{ln(0.125)}{ln(0.7)} \approx 6$

Conclusion : Il aura été nécessaire de réaliser $N = 7$ injections avec ce protocole car u_6 correspond à la 7ème injection.

Chapitre 2

Session 2023

2.1. Énoncé et réponses (5 points)

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.

On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Partie B : Une autre modélisation

Partie C : Comparaison des deux modèles

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :

• 90% des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
• 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.
Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ème mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par : $u_1 = 3$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0.9 * u_n + 1.3$

Question 1

Calculer u_2 et u_3 et proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.

• $u_1 = 0.9 * 3 + 1.3 = 4$
• $u_2 = 0.9 * 4 + 1.3 = 4.9$

Au 2ème mois de la FAQ, la modélisation prévoit 400 questions et au 3ème mois elle en prévoit 490 questions.

Question 2

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1\ u_n = 13 - \left(\frac{100}{9} * 0.9^n\right)$

• Notons, $\forall n \in \mathcal{N}$, $\mathcal{H}(n)$, **la propriété** $u_n = 13 - \left(\frac{100}{9} * 0.9^n\right)$

• **Initialisation** : $u_0 = 3$ et $13 - \left(\frac{100}{9} * 0.9\right) = 3$ DONC $\mathcal{H}(0)$ est **vraie**

• **Hérédité** : SOIT $N \in \mathcal{N}$.

$\mapsto$ **Supposons que** $\mathcal{H}(N)$ est **vraie**, i.e. $u_N = 13 - \left(\frac{100}{9} * 0.9^N\right)$

$\mapsto$ **Montrons que** $\mathcal{H}(N+1)$ en partant de la définition de la suite :

$$u_{n+1} = 0.9u_N = 0.9 * \left(13 - \left(\frac{100}{9} * 0.9^N\right)\right) + 1.3 = 11.7 - \frac{100}{9}^{N+1} + 1.3 = 13 - \left(\frac{100}{9} * 0.9^{N+1}\right)$$

• **On a prouver que** $\forall n \in \mathcal{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie. La propriété est démontrée par principe de récurrence.

Question 3

En déduire que la suite u_n est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{100}{9} * \left(0.9^{n+1} - 0.9^n\right) = \frac{100}{9} * 0.9^n * (1 - 0.9) = \frac{10}{9} * 0.9^n = 0.9^{n-1} \geqslant 0$$

Ainsi, la suite u_n est croissante.

Question 4

On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python.
Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil (8.5) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

def seuil(p) :

$n = 1$, $u = 3$

while $u \leqslant p$:

$n = n + 1$

$u = 0.9 * u + 1.3$

return n

Ce programme renvoie le premier rang N tel que $u_N > p$. Dans le cas présent

$u_n > 8.5 \Leftrightarrow 13 - \left(\frac{100}{9} * 0.9^n\right) > 8.5 \Leftrightarrow \frac{100}{9} * 0.9^n < 4.5 \Leftrightarrow 0.9^n < 4.5 * 0.09 \Leftrightarrow 0.9^n < 0.405$

Par application du log strictement croissant sur $\mathscr{R}_*^+$

$nlog(0.9) < log(0.405) \Leftrightarrow n > \frac{log(0.405)}{log(0.9)} \Leftrightarrow$ $n > 8.57$

Le programme renvoie donc $N = 9$

2.3. PARTIE B : UNE AUTRE MODÉLISATION

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite v_n définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par : $v(n) = 9 - 6 * e^{-0.19*(n-1)}$

Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n-nième mois sur la FAQ.

Question 1

Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1 et v_2.

• $v_1 = 9 - 6 = 3$• $v_2 = 9 - 6e^{-0.19} \simeq 4.04$

Question 2

Déterminer, en justifiant la réponse, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8.5$.

On cherche n tel que $v_n = 8.5$:

$9 - 6e^{-0.19(n-1)} = 8.5 \Leftrightarrow e^{-0.19(n-1)} = \frac{0.5}{6} \Leftrightarrow -0.19(n-1) = -ln(12) \Leftrightarrow n = 1 + \frac{ln(12)}{0.19}$

On trouve après calculs $n = 15$

2.4. PARTIE C : COMPARAISON DES DEUX MODÈLES

Question 1

L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ. Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification? Justifier votre réponse.

Il s agit de comparer les question A4 et B2.
La première modélisation dépasse les 850 questions au 9ème mois alors que la deuxième ne les dépasse qu'au 15ème mois.
La première modélisation conduit donc à la modification la plus prématurée.

Question 2

En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme?

Il s'agit en fait de calculer les limites des deux suites u_n et v_n.
Le cours sur les suites géométriques nous assure que pour $-1 < q < 1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

DONC par opérations sur les limites $\lim_{n\to+\infty} u_n = 13 - \frac{100}{9} * 0 = 13$
DE PLUS, on sait que $\lim_{n\to+\infty} exp(-n) = 0$ DONC $\lim_{n\to+\infty} v_n = 9 - 6 * 0 = 9$
La première modélisation prévoit le plus de question : au maximum 1300 alors que la deuxième modélisation n'en prévoit que

Chapitre 3

Session 2024

3.1. Énoncé et réponses (4 points)

• Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

• Chaque réponse doit être justifiée.

• Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Question 1

On considère la fonction f définie sur $\mathscr{R}$ par : $f(x) = 5e^{-x}$.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Question 1-a L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe C_f.

Pour tout $x \in \mathscr{R}$, $f(x) = 5e^{-x} = \frac{5x}{e^x}$.
OR $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissance comparée entre $y = e^x$, $y = x$ et $y = lnx$
$\frac{x \longrightarrow \infty}{e^x \longrightarrow \infty}$ on a $\frac{\infty}{\infty}$, forme indéterminée. MAIS la fonction exponentielle l'emporte DONC $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$
DONC $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
Conclusion, c_f admet pour asymptote horizontale en $+\infty$ la droite d'équation $x = 0$, soit l'axe des abscisses.

Question 1-b La fonction f est solution sur $\mathscr{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' + y = 5e^{-x}$

f est dérivable sur $\mathscr{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathscr{R}$
Pour tout $x \in \mathscr{R}$, $f'(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x}$.
DONC Pour tout $x \in \mathscr{R}$, $f'(x) + f(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x} + 5xe^{-x}$
D'OÙ Pour tout $x \in \mathscr{R}$, $f'(x) + f(x) = 5e^{-x}$
Conclusion f est solution de l'équation différentielle $()E$.

Question 2

On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n), telles que, pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1.

Question 2-a La suite (w_n) converge vers un nombre réel l appartenant à l'intervalle $[-1;+1]$.
On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.

On pose : pour tout $n \in \mathscr{N}$, $u_n = -1$, $v_n = cos(n)$ et $w_n = 1$
Pour tout $n \in \mathscr{N}$, $-1 \leqslant cos(n) \leqslant 1$
DONC $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
OR; la suite (v_n) n'admet pas de limite en $+\infty$. Conclusion $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et l'affirmation est fausse.

Question 2-b Pour tout entier naturel n, on a alors : $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.

On a supposé que la suite (u_n) est croissante.
DONC Pour tout $n \in \mathscr{N}$, $u_0 \leqslant u_n$ *car croissante.*
De même, comme la suite (w_n) est décroissante
DONC Pour tout $n \in \mathscr{N}$, $w_n \leqslant w_0$ *car décroissante.*
Conclusion Pour tout $n \in \mathscr{N}$, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_0$ Pour tout $n \in \mathscr{N}$, $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.

Chapitre 4

Session 2025

4.1. ÉNONCÉ ET RÉPONSES (5 POINTS)

• Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

• La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 (ha) de cette zone.

4.2. PARTIE A : ÉTUDE D'UN MODÈLE DISCRET

4.3. PARTIE B : ÉTUDE D'UN MODÈLE CONTINU

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n, on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024+n$. Ainsi $u_0 = 1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = -0.02u_n^2 + 1.3u_n$.

Question 1

Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.

On cherche : $u_1 = -0.02 * 1^2 + 1.3 * 1 = -0.02 + 1.3 = 1.28$

Conclusion La superficie recouverte par la posidonie au 1er juillet 2025 est donc $1,28$ ha.

Question 2

On note h la fonction définie sur $[0;20]$ par $h(x) = -0.02x^2 + 1.3x$.

On admet que h est croissante sur $[0;20]$.

Question 2-a

Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.

- Montrons par **récurrence** que $n, 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.
- **Initialisation** : $u_0 = 1 \in [1;20]$ ET $u_1 = 1.28 \geqslant u_0$.
- **Hérédité** : supposons que $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$

h est croissante sur $[0;20]$ (admis)

DONC : $u_{n+1} = h(u_n) \geqslant h(1) = u_1 \geqslant 1$ • ET $u_{n+1} \leqslant h(20) = -0.02 * 400 + 1.3 * 20 = -8 + 26 = 18$ •

DONC $u_{n+1} \leqslant 20$ ET COMME h, croissante, on a $u_{n+1} = h(u_n) \geqslant h(n-1) = u_n$

CONCLUSION : la suite est croissante, majorée par 20, et $u_n \geqslant 1$.

Question 2-b

En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite. .

CONCLUSION : La suite est croissante et majorée, donc elle converge. On note sa limite L.

Question 2-c

Justifier que $L = 15$.

A la limite, on a $lim u_n = L$

DONC : $L = -0.02L^2 + 1.3L \Rightarrow 0 = -0.02L^2 + 0.3L \Rightarrow 0 = L(-0.02L + 0.3)$

$\Rightarrow L = 0$ OU $L = \dfrac{0.3}{0.02} = 15$

CONCLUSION : La suite est toujours $\geqslant 1$ DONC $L = 15$.

Question 3

Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.

Question 3-a

Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.

Le modèle est croissant, donc à partir d'un certain rang n $u_n > 14$

CONCLUSION : Cela arrivera forcément puisque la limite est $15 > 14$.

Question 3-b

Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
def seuil() :
    n=0
    u=1
    while :
        n=
        u=
    return n
```

Complétons l'algorithme :

```
def seuil() :
    n=0
    u=1
    while u ⩽ 14 :
        n=n+1
        u = −0.02 ∗ u^2 + 1.3 ∗ u
    return n
```