



WP-CMS

Mathématiques

Géométrie - analytique

Fiche de synthèse

Version 1.1.0

[*→ Document de référence*](#)

1 Plan du document	2
2 Bases de la géométrie analytique	3
3 Équation de droite	3
3.1 Avec deux points	3
3.2 Avec un point et un vecteur directeur	4
3.3 Avec un point et un vecteur normal	4
4 Équation de cercle	5
4.1 Avec le centre et un point du cercle	5
4.2 Avec les deux extrémités d'un diamètre	5
4.3 Avec le centre et le rayon	6
5 Coordonnées d'un vecteur directeur et d'un vecteur normal à une droite	6
5.1 Vecteur directeur	6
5.2 Vecteur normal	7
6 Équation d'une droite de l'espace	7
7 Équation d'un plan de l'espace	8

2 Bases de la géométrie analytique

WP-CMS

La géométrie analytique, aussi appelée géométrie repérée, est la géométrie avec des coordonnées dans des repères.

Elle permet de calculer les coordonnées (la position) de points dans des plans munis de repères et de faire des démonstrations et des calculs de longueurs dans des figures géométriques.

Dans le cours de seconde, nous avons vu comment calculer les coordonnées du milieu de deux points, comment calculer les coordonnées d'un vecteur, la distance entre deux points et comment savoir si deux vecteurs sont colinéaires lorsqu'on connaît leurs coordonnées.

Dans ce cours, nous allons voir comment calculer des **équations de droites** et de cercles dans un repère orthonormé, et comment déterminer un **vecteur directeur** et un **vecteur normal** d'une droite à partir de son équation.

3 Équation de droite

L'équation cartésienne d'une droite est une égalité qui relie l'ordonnée y à l'abscisse x de n'importe quel point de la droite.

Par exemple, $y = 2x + 3$ est une équation de droite.

Le point $A(0;3)$ appartient à cette droite, car **SI** on remplace ses coordonnées dans l'équation de la droite, l'équation est vérifiée.

Nous allons voir comment calculer l'équation d'une droite dans 3 cas différents, en fonction des données que l'on connaît :

- à partir **de deux points**.
- à partir d'**un point et d'un vecteur directeur**.
- à partir d'**un point et d'un vecteur normal**.

3.1 Avec deux points

SI on connaît les coordonnées de deux points $A(X_A; Y_A)$ et $A(X_B; Y_B)$ dans un repère orthonormé, on peut calculer l'équation de la droite qui passe par ces deux points.

L'équation est de la forme $y = mx + p$: m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

Nous devons trouver m et p

1 - On calcule le coefficient directeur avec la formule Formule coefficient directeur. $\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$

2 - On le remplace dans l'équation $y = mx + p$.

3 - On remplace X et Y par les coordonnées d'un point de la droite et on calcule P en résolvant une équation du premier degré.

4 - On remplace P dans l'équation $y = mx + p$.

Exemple Équation de la droite AB passant par $A(-3;7)$ et $B(2;-3)$

WP-CMS

$$\bullet 1 - \frac{-3 - -7}{2 - 0 - 3} = \frac{-10}{5} = -2$$

$$2 - y = -2x + p.$$

$$3 - Y_A = -2X_A + p \text{ donc } 7 = -2 * (-3) + p \text{ donc } p = 1$$

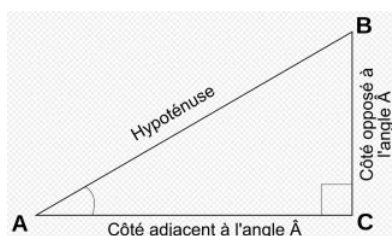
$$4 - Y = -2x + 1$$

3.2 Avec un point et un vecteur directeur

Un **vecteur directeur** d'une droite est un vecteur de même direction que la droite.

SI on connaît les coordonnées d'un point $A(X_A; Y_A)$ appartenant à une droite (d) et celles d'un vecteur directeur $\vec{v}(v_x; v_y)$ de d

ALORS d est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que les vecteurs vecteur AM et vecteur v sont **colinéaires**.



Exemple Équation de la droite qui passe par $T(-3;5)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3;4)$

$$1 - \text{Soit } M(x; y) \text{ un point de la droite } \vec{u}(3;4) \text{ et } \overrightarrow{TM}(x+3; y-5)$$

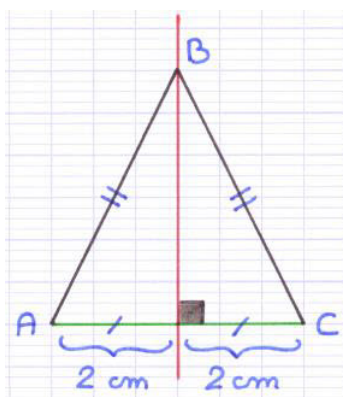
$$2 - \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{TM} \text{ sont colinéaires donc } 3(y-5) - 4(x+3) = 0$$

$$3 - 3y - 15 - 4x - 12 = 0 \text{ donc l'équation de la droite est } -4x + 3y - 27 = 0$$

3.3 Avec un point et un vecteur normal

Un **vecteur normal** à une droite est un vecteur orthogonal à n'importe quel vecteur directeur de la droite.

C'est donc un vecteur dont la direction est perpendiculaire à celle de la droite.



Exemple Équation de la droite qui passe par $T(-3;5)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3;4)$

- 1 - Soit $M(x; y)$ un point de la droite $\vec{n}(3; 4)$ et $\overrightarrow{TM}(x+3; y-5)$
- 2 - $\vec{n}$ et $\overrightarrow{TM}$ sont orthogonaux donc $3(x+3) - 4(y-5) = 0$
- 3 - $3x + 4y - 11 = 0$

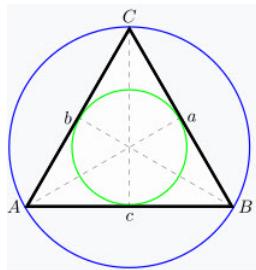
WP-CMS

4 Équation de cercle

4.1 Avec le centre et un point du cercle

Considérons un cercle de centre $A(X_A; Y_A)$, un point $B(X_B; Y_B)$ sur le cercle, et B' le symétrique de B par rapport à A .

Comme nous l'avons vu dans le cours précédent, le cercle est l'ensemble des points M tels que vecteur et vecteur sont orthogonaux.



Comme $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB'}, B'(2X_A - X_B; 2Y_A - Y_B)$

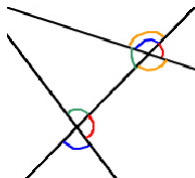
Donc $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2X_A - X_B - X \\ 2Y_A - Y_B - Y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} X_B - X \\ Y_B - Y \end{pmatrix}$

Donc $(2X_A - X_B - X)(X_B - X) + (2Y_A - Y_B - Y)(Y_B - Y) = 0$

En développant cette équation, on obtient **l'équation du cercle**.

4.2 Avec les deux extrémités d'un diamètre

Prenons maintenant un cercle dont on connaît les coordonnées de deux extrémités $A(X_A; Y_A)$ et $B(X_B; Y_B)$ d'un diamètre.



Le cercle est également l'ensemble des points $M(X; Y)$ tels que $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{MA}(X_A - x; Y_A - Y)$ et $\overrightarrow{MB}(X_B - x; Y_B - Y)$

Comme $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, on a $(X_A - X)(X_B - X) + (Y_A - Y)(Y_B - Y) = 0$

En développant, on obtient $X_A X_B - X X_A - X X_B + X^2 + Y_A Y_B - Y Y_A - Y Y_B + Y^2 = 0$

Il reste à additionner les nombres connus et on obtient l'équation cartésienne du cercle.

4.3 Avec le centre et le rayon

WP-CMS

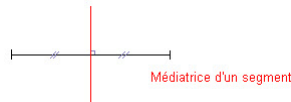
l'équation précédente peut aussi s'écrire

$$X^2 - (X_A + X_B + X_A X_B) + Y^2 - (Y_A + Y_B + Y_A Y_B)$$

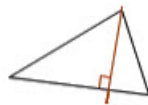
Factorisons cette équation avec une identité remarquable.



Appelons Ω le milieu de $[AB]$.



On a



Conclusion

Le cercle est l'ensemble des points $M(X; Y)$ tels que $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$
avec $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ son centre et r son rayon

Exemple Le cercle de centre $S(1;5)$ et de rayon 10 a pour équation $(X - 1)^2 + (Y + 5)^2 = 100$.

5 Coordonnées d'un vecteur directeur et d'un vecteur normal à une droite

5.1 Vecteur directeur

Comme nous l'avons vu, un vecteur directeur d'une droite est un vecteur qui possède la même direction que cette droite.

SI on connaît l'équation de la droite sous la forme $y = mx + p$, où, mieux, sous sa forme cartésienne $ax + b = 0$, il est possible de lire les coordonnées d'un tel vecteur à partir de l'équation : **un vecteur directeur de la droite est en effet le vecteur $\vec{v}(-b; a)$.**

En effet, considérons le vecteur qui passe par deux points M et N d'une droite (d) d'équation cartésienne $ax + b = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{MN}(X_N - X_M; Y_N - Y_M)$ est un vecteur directeur de cette droite vu qu'il est dessus.

Comme $M \in (d)$ et $N \in (d)$, on a $aX_M + bY_M = 0$ et $aX_N + bY_N = 0$

En soustrayant ces deux équations, on obtient $a(X_M - X_N) + b(Y_M - Y_N) = 0$

$$\text{Donc } X_M - X_N = -\frac{b}{a}(Y_M - Y_N)$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{MN} \text{ a pour coordonnées } \overrightarrow{MN}\left(-\frac{b}{a}(Y_N - Y_M); Y_N - Y_M\right)$$

Le produit d'un vecteur directeur d'une droite par un nombre réel est un autre vecteur directeur de cette droite.

Multiplions le vecteur vecteur MN par a , puis divisions le par $Y_N - Y_M$:
on obtient un vecteur vecteur v qui est un nouveau vecteur directeur à la droite.
Ses coordonnées sont $\vec{v}(-b; a)$.

WP-CMS

Conclusion :

SI une droite à pour équation cartésienne $ax + b = 0$, **ALORS** $\vec{v}(-b; a)$ est un vecteur directeur.

5.2 Vecteur normal

Parfois, il peut être pratique de lire les coordonnées d'un vecteur normal à une droite à partir de son équation cartésienne.

De telles coordonnées sont très faciles à lire : **SI** une droite a pour équation $ax + b = 0$, **ALORS** $\vec{n}(a, b)$ est un vecteur normal.

En effet, un vecteur normal à une droite est un vecteur dont la direction est perpendiculaire à celle de la droite.

Il est donc normal à tout vecteur directeur de cette droite, en particulier au vecteur coordonnées $\vec{v}(-b; a)$.

On a donc coordonnées $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$. Comme $a * (-b) + b * a$, est un vecteur normal.

Conclusion :

SI une droite à pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$, **ALORS** $\vec{n}(a; b)$ est un vecteur normal.

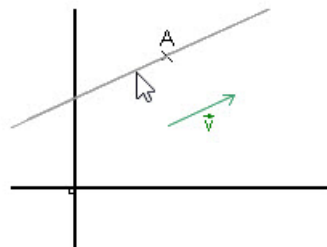
6 Équation d'une droite de l'espace

La notion de colinéarité de vecteurs se généralise dans l'espace : deux vecteurs sont colinéaires s'il existe un nombre k tel que l'un soit égal à k fois l'autre.

Pour déterminer l'équation d'une droite (d) de l'espace de vecteur directeur $\vec{v}(x_v, y_v, z_v)$ et passant par un point $A(X_A; Y_A; Z_A)$ on écrit que (d) est l'ensemble des points

$$M(X; Y; Z) \text{ tels que } \overrightarrow{AM} \begin{cases} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{cases} \vec{v} \begin{cases} x_v \\ y_v \\ z_v \end{cases}$$

soit colinéaire.



Comme $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire, ils existe un nombre k tel que $\overrightarrow{AM} = k \vec{v}$

$$M(X; Y; Z) \text{ tels que } \overrightarrow{AM} \begin{cases} x - x_A = k * x_v \\ y - y_A = k * y_v \\ z - z_A = k * z_v \end{cases} \quad \vec{v} \begin{cases} x = x_A + kx_v \\ y = y_A + ky_v \\ z = x_A + kz_v \end{cases}$$

Ce dernier système est appelé **équation paramétrique** de (d) .

7 Équation d'un plan de l'espace

La notion d'**orthogonalité** de vecteurs se généralise aussi dans l'espace : deux vecteurs de l'espace sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

Il est possible de calculer l'équation d'un plan de l'espace lorsqu'on connaît un point du plan et un vecteur normal à ce plan.

Appelons A le point connu et $\vec{u}(a, b, c)$ le vecteur normal.

Le plan est l'ensemble des points $M(X; Y; Z)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

Comme ils sont orthogonaux, leur produit scalaire est nul.

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)a + (y - y_A)b + (z - z_A)c = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$$

Donc si un point $M(X; Y; Z)$ appartient à un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{u}(a, b, c)$, il existe un nombre d tel que $ax + by + c = 0$. Cette égalité est l'**équation cartésienne** de $\mathcal{P}$.

Inversement, à partir de l'équation cartésienne d'un plan, il est toujours possible de donner les coordonnées d'un vecteur normal : ce sont les coefficients devant x , y et z .

POO EXERCICE SPYRALE-01 genre Rayon : 1 mmm Si le cinquantième [3,51](20 365 011 074) si le trentième [3,31](1 346 269) si le quarantième [3,41] (165 580 141) Distance : 384 800 km 384 000 000 000 mm import math
rayonprecedent=2 rayonencoreavant=1 quotient=2 for i in range (3,31) : rayon=rayonprecedent+rayonencoreavant
quotient=rayon/rayonprecedent print ("Quotient :", quotient) rayonencoreavant=rayonprecedent rayonpre-
cedent=rayon age = input("Quel est votre age? ")