



Mathématiques

Vecteurs et Espace vectoriel

Fiche de synthèse

Version 1.1.0

- *Document de référence*
- *Mémo – vecteurs, droites et plans dans l'espace*
- *Vecteurs – exercices – partie – 2*
- *Vecteurs – matrice – exemple – concret*

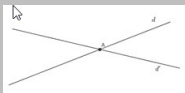
0.1	Plan du document	2
0.2	Positions relatives	4
0.2.1	Positions relatives de deux droites	4
0.2.2	Positions relatives d'une droite et d'un plan	6
0.3	Représentation d'une droite	8
0.3.1	Représentation paramétrique	8
0.4	Représentation d'un plan	10
0.4.1	Représentation paramétrique du plan	10
0.4.2	Représentation cartésienne d'un plan	10
0.5	Base et repérage dans l'espace	11
0.5.1	Base	11
0.5.2	Repère	11
0.5.3	Coordonnées dans l'espace	11
0.5.4	Calcul sur les coordonnées	11

0.2.1 Positions relatives de deux droites

Savoir si deux droites sont parallèles?; perpendiculaires?; sécantes non perpendiculaires? non colinéaires?

Données initiales : Les points $A(-7; -3; 6)$, $B(1; 5; 2)$ et la droite $D \begin{cases} x = -6 + 3t \\ y = +1 + 0t \\ z = +9 - 5t \end{cases}$

• Le point A appartient-t-il à une droite (AB) ?

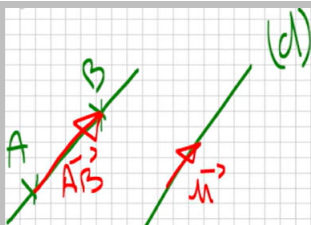


Le point $C(-7; -3; 6) \in$ à une droite (AB)

Si ces coordonnées vérifient le système d'équation paramétrique de (AB) .

Si en attribuant les coordonnées de A à chaque équation on trouve la même valeur de l'inconnue t pour chaque équation.

• Droites (AB) et (D) parallèles?



(AB) parallèles $(D) \Leftrightarrow \vec{AB}$ et \vec{u} colinéaires

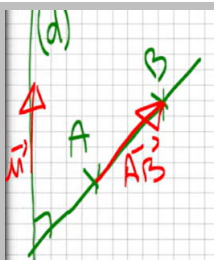
SI leurs coordonnées sont proportionnelles. SI $\exists k \in \mathcal{R}$ tel que $\vec{AB} = k \cdot \vec{u}$

ALORS (AB) est parallèle à (D)

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} +1 - (-1) = +8 \\ +5 - (-3) = +8 \\ +2 - (+6) = -4 \end{pmatrix} \text{ selon points } A \text{ et } B \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ selon représentation param. de } (D). \begin{pmatrix} 8 * 0 \neq 3 \\ +8 * 0 = 0 \\ -4 * 0 \neq -5 \end{pmatrix} k = 0$$

Les coordonnées de \vec{AB} et de \vec{u} ne sont pas proportionnelles donc \vec{AB} et de \vec{u} non colinéaires et enfin non parallèle.

• Droites (AB) et (D) perpendiculaires?



(AB) perpendiculaire $(D) \Leftrightarrow \vec{AB}$ et \vec{u} orthogonaux

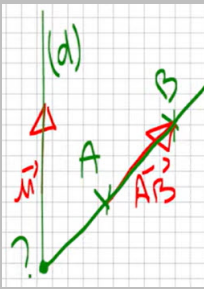
SI Le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0$

ALORS (AB) est perpendiculaire à (D)

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = (8 * 3) + (8 * 0) + (-4 * -5) = 24 + 20 = 44,$$

Le produit scalaire des deux vecteurs est différent de 0 donc non orthogonaux et enfin non perpendiculaires.

• Droites (AB) et (D) sécantes? On doit avoir la représentation paramétrique de la droite (AB) et de (D).



Connaitre (ou établir) de représentation paramétrique de (AB) et de (D).

ALORS Les coordonnées du point sécant doivent vérifier les deux représentations paramétriques.

◦ Pour (AB) Le point $A = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ Le vecteur directeur $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -7 + 8s \\ y = -3 + 8s \\ z = +6 - 4s \end{cases}$

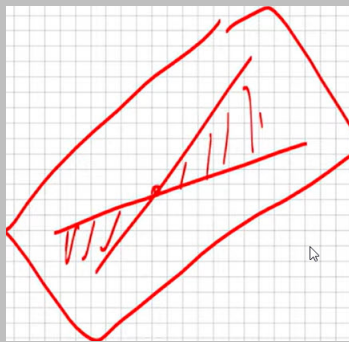
◦ Pour (D) $\begin{cases} x = -6 + 3t \\ y = +1 + 0t \\ z = +9 - 5t \end{cases}$

Les coordonnées du point sécant doit vérifier les deux représentations paramétriques :

$$\begin{cases} -6 + 3t = -7 + 8s \\ +1 + 0t = -3 + 8s \\ +9 - 5t = 6 - 4s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 + 3t = -7 + 8s \\ +9 - 5t = 6 - 4s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 + 3t = -7 + 8 * \frac{1}{2} \\ +9 - 5t = 6 - 4s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +3t = -3 \\ s = \frac{1}{2} \\ +9 - 5t = 6 - 4s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = \frac{1}{2} \\ +9 - 5 * (1) = 6 - 4 * (\frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 1 \\ s = \frac{1}{2} \\ +9 - 5 * (1) = 6 - 4 * (\frac{1}{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = \frac{1}{2} \\ 4=4 \end{cases} \text{ Les droites sont sécantes en } \begin{cases} x = -6 + 3(1) = -3 \\ y = +1 + 0t = 1 \\ z = +9 - 5(1) = +4 \end{cases}$$

• Droites (AB) et (D) non coplanaires?

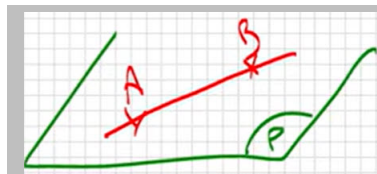


SI Les droites (AB) et (D) sont sécantes

ALORS (AB) et (D) dans un même plan donc coplanaires.

Savoir si une droite et un plan [...]

Données initiales : Les points $A(-3;1;4)$, $B(1;5;2)$ et le plan P d'équation cartésienne $-2x - y + z - 3 = 0$.

• La droite (AB) est-elle incluse dans le plan P ?

(AB) incluse dans $P \Leftrightarrow A \in P$ et $B \in P$

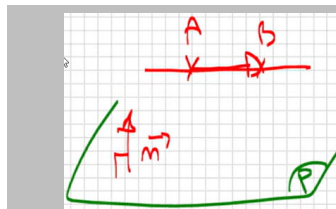
Si les coordonnées de A et B vérifient l'équation cartésienne de (P) .

ALORS la droite (AB) est incluse dans le plan P CAR **équation = 0**

• On place les coordonnées de A dans l'équation cartésienne de P

$(-2 * -3) - (1) + (4) - 3 = 0 \Rightarrow 6 - 1 + 4 - 3 = 6$ Donc **$\neq 0$ $A \notin (P)$**

Comme les deux points doivent appartenir au plan P la droite (AB) n'est pas incluse dans le plan.

• La droite (AB) est-elle parallèle au plan P ?

(AB) parallèle au plan $P \Leftrightarrow \exists \vec{n}$ tel que $\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$

Si le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$

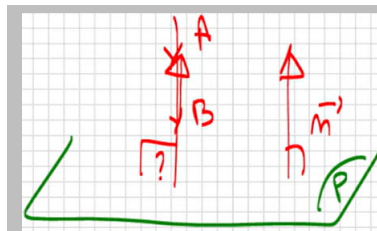
ALORS (AB) parallèle au plan P

• On calcule les coordonnées de $\vec{AB} \begin{pmatrix} +1 - (-3) = +4 \\ +5 - (+1) = +4 \\ +2 - (+4) = -2 \end{pmatrix}$ selon points A et B

• On calcule les coordonnées de \vec{n} normal au plan $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix}$ selon l'équation cartésienne du plan P

• On calcule le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (4 * -2) + (4 * -1) + (-2 * 1) = -8 - 4 - 2 = -14$,

Le produit scalaire des deux vecteurs est différent de 0 donc **non orthogonaux** et enfin **non parallèle**.

• La droite (AB) est-elle orthogonale au plan P ?

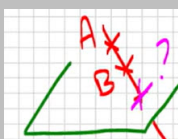
(AB) orthogonal au plan $P \Leftrightarrow \exists \vec{n}$ normal à P et colinéaire à \vec{AB}

Si les coordonnées de \vec{AB} et \vec{n} sont proportionnelles. SI $\exists k \in \mathcal{R}$ tel que $\vec{AB} = k \cdot \vec{u}$

ALORS La droite (AB) est orthogonale au plan P .

$\vec{AB} \begin{pmatrix} +4 \\ +4 \\ -2 \end{pmatrix}$ selon points A et B et $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix}$ selon représentation param. de (D) . $\begin{pmatrix} +4 \neq (-2 * -2) \\ +4 \neq (-1 * -2) \\ -2 = (1 * -2) \end{pmatrix} k = -2$

Les deux vecteurs ne sont pas **proportionnelles** donc **non colinéaires** et enfin **non orthogonale**.



(AB) non parallèle au plan $P \Leftrightarrow \exists I$, un point d'intersection de (AB) et du plan P

Si On dispose (ou réalise) la représentation paramétrique de (AB)

ALORS on inclue dans le système de 3 équations, l'équation cartésienne de P

Et on en déduit les coordonnées du point d'intersection I .

- SI la droite (AB) et le plan P ne sont ni incluse, ni strictement parallèle et ni parallèle

ALORS la droite est sécante et non orthogonale au plan P au point d'intersection I

- Recherche du point d'intersection :

$$\circ A = \begin{pmatrix} -3 \\ +1 \\ +4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} +4 \\ +4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad A \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ calculer précédemment} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = +1 + 4t \\ z = +4 - 2t \end{cases} \quad \text{Représentation paramétrique (AB)}$$

$$\circ \text{ Pour } t \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = +1 + 4t \\ z = +4 - 2t \\ -2x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = +1 + 4t \\ z = +4 - 2t \\ -2(-3 + 4t) - (1 + 4t) + (4 - 2t) - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = +1 + 4t \\ z = +4 - 2t \\ 6 - 14t = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{7} \end{cases}$$

$$\circ \text{ Pour les coordonnées du point d'intersection } I \begin{cases} x = -3 + 4 * \frac{3}{7} \\ y = +1 + 4 * \frac{3}{7} \\ z = +4 - 2 * \frac{3}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{7} \\ y = +\frac{19}{7} \\ z = +\frac{22}{7} \end{cases}$$

0.3.1 Représentation paramétrique

Si d une droite passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et dirigée par le vecteur (directeur) $\vec{u}(a; b; c)$.

Alors d est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que :

$$\text{Si } M \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = \underbrace{z_A}_{A} + \underbrace{c}_{\vec{u}} t \end{cases} \quad t \in \mathfrak{R} \text{ est la représentation paramétrique de la droite } d.$$

Alors on peut affirmer que d passe par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et que $\vec{u}(a; b; c)$ est son vecteur directeur.

Les conditions :

Pour déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AB) , Il faut

- Soit les coordonnées de $A(x_A; y_A; z_A)$ et de $B(x_B; y_B; z_B)$,

$$\text{et détermine son vecteur directeur } \vec{u}_{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

- Soit les coordonnées de $A(x_A; y_A; z_A)$ et directement son vecteur directeur.

$$\Rightarrow \text{on écrit Alors sa représentation paramétrique : } M \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = \underbrace{z_A}_{A} + \underbrace{c}_{\vec{u}} t \end{cases} \quad a, b, c \in \mathfrak{R}.$$

Calculer \vec{AB} à partir des coordonnées des points A et B

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } B \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Donc } \vec{AB} \begin{pmatrix} -1 - (-1) \\ +3 - (+1) \\ +0 - (+3) \end{pmatrix}$$

$$\text{Montrer que le point } B(-1; 3; 0) \text{ appartient à la droite } D \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 1t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

$$M(1; 2; 2), \text{ un point de la droite et } \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ un vecteur directeur. Après calcul } \vec{MB} \begin{pmatrix} -2 \\ +1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

SI $M(1; 2; 2) \in D$ ALORS $B \in D \Leftrightarrow \exists t \in \mathfrak{R}, \vec{MB} = t \vec{u}$.

$\vec{MB} = -\vec{u}$ les deux vecteurs sont donc colinéaires, le point B appartient bien à la droite D . $t = -1$.

Montrer que le plan P admet une équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$

WP-CMS

Le plan P étant orthogonal à la droite D , le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ directeur de la droite est un vecteur normal à P

Le plan P admet alors l'équation cartésienne $2x - y + 2z + c = 0$ ou les coefficients sont les coordonnées de \vec{u} . On cherche C . Sachant que $A(-1; 1; 3) \in P \Rightarrow [2 * (-1)] + [-1] + [2 * 3] + C = 0 \Rightarrow C = 3$

Le plan P admet alors l'équation cartésienne $2x - y + 2z + c = 0$ ou les coefficients sont les coordonnées de \vec{u} .

Chercher les coordonnées du point H d'intersection entre D et P

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 1t \\ z = 2 + 2t \\ 2x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 1t \\ z = 2 + 2t \\ 2(1 + 2t) - (2 - t) + 2(2 + 2t) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 1t \\ z = 2 + 2t \\ 9t + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{9} \end{cases} \begin{cases} x = 1 + 2 * (-\frac{1}{9}) = \frac{7}{9} \\ y = 2 + \frac{1}{9} = \frac{19}{9} \\ z = 2 + 2 * (-\frac{1}{9}) = \frac{16}{9} \end{cases}$$

Finalement, on donc bien $H\left(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9}\right)$ coordonnées du point d'intersection entre D et P .

Calculer la longueur de AH

$A(-1; 1; 3)$ et $H\left(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9}\right)$

$$d = \sqrt{\left(\frac{7}{9} + 1\right)^2 + \left(\frac{19}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{16}{9} - 3\right)^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{256}{81} + \frac{100}{81} + \frac{121}{81}} \Rightarrow \frac{477}{81} = \sqrt{\frac{53}{9}} = \frac{\sqrt{53}}{3}$$

0.4.1 Représentation paramétrique du plan

Si \mathcal{P} un plan caractérisé par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et deux vecteurs $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(\alpha; \beta; \gamma)$ non colinéaires.

Alors \mathcal{P} est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + at + \alpha t' \\ y = y_A + bt + \beta t' \\ z = z_A + ct + \gamma t' \end{cases}$$

0.4.2 Représentation cartésienne d'un plan

Dans un repère orthonormal, tout plan \mathcal{P} a une équation de forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ avec } a, b, c \text{ non-nuls du vecteur normal } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Les conditions :

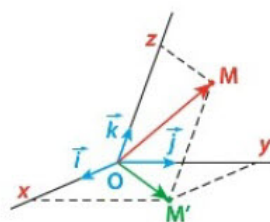
- On appelle vecteur normal à un plan \mathcal{P} tout vecteur directeur d'une droite perpendiculaire au plan \mathcal{P} **Démontrer** [...]
- Déterminer la valeur de d

Si d une droite passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et dirigée par le vecteur (directeur) $\vec{u}(a; b; c)$.

Alors l'équation cartésienne de d est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ avec } d = a * (x_A) + b * (y_A) + c * (z_A)$$

0.5.1 Base



- Une base de l'espace est formée par trois vecteurs non coplanaires.
- Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.
Pour tout vecteur \vec{u} , il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- Les deux plans sont parallèles et confondues.

0.5.2 Repère

Un repère de l'espace est un quadruplet composé d'un point O (origine du repère) et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace. On le note $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

0.5.3 Coordonnées dans l'espace

Théorème :

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

Si \vec{u} un vecteur de l'espace et x, y, z les réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Alors le triplet $(x; y; z)$ représente les coordonnées du vecteur \vec{u} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

x est l'**abscisse**, y l'**ordonnée** et z la **cote** du vecteur \vec{u} dans ce repère.

Si M le point de l'espace tel que $\vec{u} = \vec{OM}$ Alors M a aussi pour coordonnées $(x; y; z)$ dans ce repère.

Propriété :

Soient deux vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ dans une base de l'espace et soit α un réel.

$$-\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x = x', y = y' \text{ et } z = z'$$

$$-\vec{u} + \vec{v} \text{ pour coordonnées dans cette base } (x + x'; y + y'; z + z')$$

$$-\alpha \vec{u} \text{ a pour coordonnées } (\alpha x; \alpha y; \alpha z)$$

0.5.4 Calcul sur les coordonnées

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

- Si \vec{u} et \vec{v} ont pour coordonnées respectives $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$, Alors
Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx; ky; kz)$ avec $k \in \mathcal{R}$
Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y'; z + z')$
- Si A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A; y_A; z_A)$ et $(x_B; y_B; z_B)$, Alors
Le vecteur \vec{AB} a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $(\frac{x_B + x_A}{2}; \frac{y_B + y_A}{2}; \frac{z_B + z_A}{2})$

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$