

Exercices corrigés de géométrie euclidienne et d'espaces préhilbertiens

Niveau Mathématiques Supérieures

Exercice 1 — Produit scalaire et norme

Soient

$$u = (1, 2, -1), \quad v = (2, -1, 3)$$

dans \mathbb{R}^3 .

- 1) Calculer $u \cdot v$.
- 2) Calculer $\|u\|$ et $\|v\|$.
- 3) Déterminer l'angle entre u et v .

Correction

$$u \cdot v = 1 \times 2 + 2 \times (-1) + (-1) \times 3 = -3.$$

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6},$$

$$\|v\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

L'angle θ vérifie

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = \frac{-3}{2\sqrt{21}}.$$

Ainsi,

$$\theta = \arccos\left(\frac{-3}{2\sqrt{21}}\right).$$

Exercice 2 — Orthogonalité

Dans \mathbb{R}^3 , on considère

$$u = (1, 1, 0), \quad v = (1, -1, 2), \quad w = (2, 0, 1).$$

- 1) Vérifier que u et v sont orthogonaux.
- 2) Déterminer si la famille (u, v, w) est orthogonale.
- 3) La rendre orthonormale si possible.

Correction

$$u \cdot v = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 2 = 0.$$

Donc $u \perp v$.

Ensuite,

$$u \cdot w = 2, \quad v \cdot w = 4.$$

La famille n'est donc pas orthogonale.

On normalise alors :

$$e_1 = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0),$$
$$e_2 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2).$$

Exercice 3 — Projection orthogonale

Dans \mathbb{R}^2 , on projette

$$u = (3, 1)$$

sur la droite vectorielle engendrée par

$$v = (1, 2).$$

Déterminer :

- 1) la projection orthogonale de u sur $\text{Vect}(v)$;
- 2) la distance de u à cette droite.

Correction

$$\text{proj}_v(u) = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v.$$

On a

$$u \cdot v = 3 \times 1 + 1 \times 2 = 5,$$

et

$$\|v\|^2 = 1^2 + 2^2 = 5.$$

Donc

$$\text{proj}_v(u) = (1, 2).$$

La composante orthogonale vaut

$$u - \text{proj}_v(u) = (2, -1).$$

Sa norme est

$$\sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

La distance cherchée est donc

$$d(u, \text{Vect}(v)) = \sqrt{5}.$$

Exercice 4 — Inégalité de Cauchy–Schwarz

Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|,$$

et déterminer le cas d'égalité.

Correction

Considérons

$$f(t) = \|u - tv\|^2.$$

Comme une norme au carré est positive,

$$f(t) \geq 0.$$

Développons :

$$f(t) = \|u\|^2 - 2t(u \cdot v) + t^2\|v\|^2.$$

Le discriminant est négatif ou nul :

$$\Delta = 4(u \cdot v)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0.$$

Ainsi,

$$(u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2.$$

Donc

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|.$$

Il y a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

Exercice 5 — Produit scalaire sur un espace de polynômes

Sur $E = \mathbb{R}_2[X]$, on définit

$$\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

Montrer que c'est un produit scalaire.

Correction

La bilinéarité et la symétrie sont immédiates.

De plus,

$$\langle P, P \rangle = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 \geq 0.$$

Si

$$\langle P, P \rangle = 0,$$

alors

$$P(0) = P(1) = P(2) = 0.$$

Le polynôme P possède trois racines distinctes et est de degré inférieur ou égal à 2.

Donc

$$P = 0.$$

La forme est donc définie positive.

Exercice 6 — Orthogonalisation de Gram–Schmidt

Dans \mathbb{R}^3 , orthonormaliser la famille

$$u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (1, 0, 1).$$

Correction

On pose

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0).$$

Puis

$$v_2 = u_2 - (u_2 \cdot e_1)e_1.$$

Or

$$u_2 \cdot e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc

$$v_2 = (1, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Sa norme vaut

$$\|v_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ainsi,

$$e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}.$$

La famille (e_1, e_2) est orthonormale.

Exercice 7 — Théorème de Pythagore généralisé

Soient u, v orthogonaux dans un espace préhilbertien réel.
Montrer que

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Correction

On développe :

$$\|u + v\|^2 = (u + v) \cdot (u + v).$$

Donc

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u \cdot v) + \|v\|^2.$$

Comme $u \perp v$,

$$u \cdot v = 0.$$

Ainsi,

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Exercice 8 — Distance à un sous-espace

Dans \mathbb{R}^3 , on considère

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

Calculer la distance du vecteur

$$u = (1, 2, 3)$$

à F .

Correction

Le vecteur normal au plan est

$$n = (1, 1, 1).$$

La projection de u sur n vaut

$$p = \frac{u \cdot n}{\|n\|^2} n.$$

Or

$$u \cdot n = 6, \quad \|n\|^2 = 3.$$

Donc

$$p = 2(1, 1, 1) = (2, 2, 2).$$

La distance vaut alors

$$\|p\| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$