

# Géométrie euclidienne et espaces préhilbertiens

Cours de Mathématiques – Niveau Math Sup

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Produit scalaire</b>	<b>1</b>
2.1	Exemple fondamental . . . . .	1
<b>3</b>	<b>Norme euclidienne</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Inégalité de Cauchy–Schwarz</b>	<b>2</b>
<b>5</b>	<b>Angle et orthogonalité</b>	<b>2</b>
<b>6</b>	<b>Théorème de Pythagore</b>	<b>3</b>
<b>7</b>	<b>Bases orthonormées</b>	<b>3</b>
<b>8</b>	<b>Procédé de Gram–Schmidt</b>	<b>3</b>
8.1	Cas de deux vecteurs . . . . .	3
<b>9</b>	<b>Orthogonal d’un sous-espace</b>	<b>4</b>
<b>10</b>	<b>Projection orthogonale</b>	<b>4</b>
10.1	Projection sur une droite . . . . .	4
<b>11</b>	<b>Matrices orthogonales</b>	<b>4</b>
<b>12</b>	<b>Espaces préhilbertiens de fonctions</b>	<b>4</b>
12.1	Orthogonalité des fonctions . . . . .	5
<b>13</b>	<b>Exercices</b>	<b>5</b>
<b>14</b>	<b>Conclusion</b>	<b>5</b>

## 1 Introduction

La géométrie euclidienne moderne repose sur la notion de produit scalaire. Cette structure permet de définir :

- les longueurs ;
- les angles ;
- l’orthogonalité ;
- les projections orthogonales.

Les espaces préhilbertiens généralisent ces notions à des espaces vectoriels abstraits.

## 2 Produit scalaire

**Définition 2.1.** Soit  $E$  un espace vectoriel réel.

Un produit scalaire sur  $E$  est une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

qui vérifie :

(i) la bilinéarité ;

(ii) la symétrie :

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle;$$

(iii) la positivité :

$$\langle x, x \rangle \geq 0;$$

(iv) la séparation :

$$\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$$

**Définition 2.2.** Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien réel.

Lorsqu'il est de dimension finie, on parle souvent d'espace euclidien.

### 2.1 Exemple fondamental

Dans  $\mathbb{R}^n$ , le produit scalaire canonique est défini par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

## 3 Norme euclidienne

**Définition 3.1.** La norme associée au produit scalaire est définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Dans  $\mathbb{R}^n$ , on obtient

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

## 4 Inégalité de Cauchy–Schwarz

**Théorème 4.1** (Cauchy–Schwarz). Pour tous  $x, y \in E$ ,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Il y a égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

*Démonstration.* Considérons le polynôme

$$P(t) = \|x + ty\|^2.$$

Comme une norme au carré est toujours positive,

$$P(t) \geq 0.$$

On développe :

$$P(t) = \|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2.$$

Le discriminant doit être négatif ou nul, donc

$$4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0.$$

D'où

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

□

## 5 Angle et orthogonalité

**Définition 5.1.** Pour  $x, y \neq 0$ , l'angle  $\theta$  entre  $x$  et  $y$  est défini par

$$\cos(\theta) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

**Définition 5.2.** Deux vecteurs  $x$  et  $y$  sont dits orthogonaux lorsque

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

On note alors

$$x \perp y.$$

## 6 Théorème de Pythagore

**Proposition 6.1.** Si  $x \perp y$ , alors

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

*Démonstration.* On développe :

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle.$$

Donc

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

Comme  $x \perp y$ ,

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

D'où le résultat.

□

## 7 Bases orthonormées

**Définition 7.1.** Une famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est :

— orthogonale si

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad (i \neq j);$$

— orthonormée si de plus

$$\|e_i\| = 1.$$

**Proposition 7.2.** Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $E$ , alors tout vecteur  $x$  s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

## 8 Procédé de Gram–Schmidt

Le procédé de Gram–Schmidt permet de transformer une base quelconque en une base orthonormée.

### 8.1 Cas de deux vecteurs

Soient  $u_1, u_2$  deux vecteurs libres.

On pose

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}.$$

Puis

$$v_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1.$$

Enfin,

$$e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}.$$

Alors  $(e_1, e_2)$  est une famille orthonormée.

## 9 Orthogonal d'un sous-espace

**Définition 9.1.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

On définit l'orthogonal de  $F$  par

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

**Proposition 9.2.**  $F^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

## 10 Projection orthogonale

**Théorème 10.1.** Dans un espace euclidien,

$$E = F \oplus F^\perp.$$

Tout vecteur  $x \in E$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = p_F(x) + q_F(x)$$

avec

$$p_F(x) \in F \quad \text{et} \quad q_F(x) \in F^\perp.$$

**Définition 10.2.** L'application  $p_F$  est appelée la projection orthogonale sur  $F$ .

### 10.1 Projection sur une droite

Si  $u$  est un vecteur unitaire, la projection orthogonale sur la droite dirigée par  $u$  est

$$p(x) = \langle x, u \rangle u.$$

## 11 Matrices orthogonales

**Définition 11.1.** Une matrice réelle carrée  $A$  est dite orthogonale lorsque

$$A^T A = I.$$

**Proposition 11.2.** Si  $A$  est orthogonale, alors

$$A^{-1} = A^T.$$

Les matrices orthogonales représentent les isométries vectorielles.

## 12 Espaces préhilbertiens de fonctions

Considérons l'espace

$$C([a, b], \mathbb{R}).$$

On définit un produit scalaire par

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

La norme associée est

$$\|f\| = \left( \int_a^b f(t)^2 dt \right)^{1/2}.$$

### 12.1 Orthogonalité des fonctions

Deux fonctions sont orthogonales si

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = 0.$$

Par exemple,

$$\sin(nt) \perp \cos(mt)$$

sur  $[0, 2\pi]$ .

## 13 Exercices

### Exercice 1

Montrer que

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

### Exercice 2

Orthonormaliser la famille

$$(1, 1, 0), \quad (1, 0, 1), \quad (0, 1, 1).$$

### Exercice 3

Déterminer la projection orthogonale de

$$(1, 2, 3)$$

sur le plan

$$x + y + z = 0.$$

### Exercice 4

Montrer que les fonctions

$$1, \quad \cos t, \quad \sin t$$

forment une famille orthogonale dans

$$C([0, 2\pi]).$$

## 14 Conclusion

Les espaces euclidiens et préhilbertiens fournissent un cadre algébrique extrêmement puissant pour l'étude de la géométrie.

Ces notions interviennent dans :

- l'analyse fonctionnelle ;
- la physique mathématique ;
- l'optimisation ;
- la théorie du signal ;
- les statistiques ;
- l'apprentissage automatique.