

Cours de logique et de raisonnement

Niveau Math Sup

Table des matières

1	Introduction	2
2	Propositions logiques	2
3	Connecteurs logiques	2
3.1	Négation	2
3.2	Conjonction	2
3.3	Disjonction	3
3.4	Implication	3
3.5	Équivalence	3
4	Tables de vérité	3
4.1	Table de vérité de l'implication	3
5	Conditions nécessaires et suffisantes	4
6	Quantificateurs	4
6.1	Quantificateur universel	4
6.2	Quantificateur existentiel	4
6.3	Unicité	4
7	Négation des quantificateurs	4
7.1	Négation du quantificateur universel	4
7.2	Négation du quantificateur existentiel	5
8	Méthodes de démonstration	5
8.1	Démonstration directe	5
8.2	Contraposée	5
8.3	Raisonnement par l'absurde	5
8.4	Exemple : irrationalité de $\sqrt{2}$	6
8.5	Raisonnement par récurrence	6
8.5.1	Initialisation	6
8.5.2	Hérédité	6
8.5.3	Conclusion	6
8.6	Exemple de récurrence	6
9	Ensembles et logique	7
9.1	Inclusion	7
9.2	Égalité de deux ensembles	7

10 Erreurs classiques	7
10.1 Confusion entre implication et réciproque	7
10.2 Oubli des hypothèses	8
10.3 Exemple non démonstratif	8
11 Conseils de rédaction	8
12 Exercices	8
12.1 Exercices élémentaires	8
12.2 Exercices intermédiaires	8
13 Résumé	9

1 Introduction

La logique est l'outil fondamental des mathématiques. Elle permet de :

- formuler correctement des énoncés ;
- construire des démonstrations rigoureuses ;
- distinguer les arguments valides des raisonnements faux ;
- structurer la pensée mathématique.

En classe préparatoire, la difficulté principale réside souvent moins dans les calculs que dans la qualité du raisonnement.

2 Propositions logiques

Une **proposition** est une phrase mathématique possédant une valeur de vérité :

- vraie ;
- ou fausse.

Exemples :

- $2 + 3 = 5$: vraie ;
- “7 est pair” : fausse.

Ne sont pas des propositions :

- “Calculez x ” ;
- “Bonjour”.

3 Connecteurs logiques

3.1 Négation

La négation d'une proposition P se note :

$$\neg P$$

Exemple :

$$\begin{aligned} P &: x > 2 \\ \neg P &: x \leq 2 \end{aligned}$$

3.2 Conjonction

La conjonction de P et Q se note :

$$P \wedge Q$$

Elle est vraie lorsque P et Q sont vraies simultanément.

Exemple :

$$x > 0 \wedge x < 1$$

3.3 Disjonction

La disjonction se note :

$$P \vee Q$$

Le “ou” mathématique est inclusif : il signifie “au moins une des deux propositions est vraie”.

3.4 Implication

Une implication se note :

$$P \Rightarrow Q$$

et signifie :

Si P est vraie, alors Q est vraie.

Exemple :

$$x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$$

3.5 Équivalence

Une équivalence se note :

$$P \Leftrightarrow Q$$

Elle signifie :

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

Exemple :

$$x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$$

4 Tables de vérité

4.1 Table de vérité de l'implication

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Le seul cas où l'implication est fausse est celui où :

P est vraie et Q est fausse.

5 Conditions nécessaires et suffisantes

Supposons :

$$P \Rightarrow Q$$

Alors :

- P est une condition suffisante de Q ;
- Q est une condition nécessaire de P .

Exemple :

$$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$$

6 Quantificateurs

6.1 Quantificateur universel

$$\forall x, P(x)$$

signifie :

Pour tout x , la propriété $P(x)$ est vraie.

Exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

6.2 Quantificateur existentiel

$$\exists x, P(x)$$

signifie :

Il existe au moins un x tel que $P(x)$ soit vraie.

Exemple :

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$$

6.3 Unicité

$$\exists! x, P(x)$$

signifie qu'il existe un unique élément vérifiant la propriété.

7 Négation des quantificateurs

7.1 Négation du quantificateur universel

$$\neg(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg P(x)$$

7.2 Négation du quantificateur existentiel

$$\neg(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg P(x)$$

8 Méthodes de démonstration

8.1 Démonstration directe

Montrons :

$$n \text{ pair} \Rightarrow n^2 \text{ pair}$$

Supposons n pair.

Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$n = 2k$$

Alors :

$$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

Donc n^2 est pair.

8.2 Contraposée

L'implication :

$$P \Rightarrow Q$$

est équivalente à :

$$\neg Q \Rightarrow \neg P$$

Exemple :

$$n^2 \text{ impair} \Rightarrow n \text{ impair}$$

On démontre la contraposée :

$$n \text{ pair} \Rightarrow n^2 \text{ pair}$$

8.3 Raisonnement par l'absurde

Principe :

- on suppose le contraire de ce que l'on veut démontrer ;
- on obtient une contradiction.

8.4 Exemple : irrationalité de $\sqrt{2}$

Supposons :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

avec p et q entiers premiers entre eux.

Alors :

$$2q^2 = p^2$$

Donc p^2 est pair, puis p est pair.

Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$p = 2k$$

En remplaçant :

$$2q^2 = 4k^2$$

Donc :

$$q^2 = 2k^2$$

Ainsi q est pair.

Les entiers p et q sont donc tous deux pairs, contradiction.

Par conséquent :

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

8.5 Raisonnement par récurrence

Pour démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$$

on procède en trois étapes.

8.5.1 Initialisation

On montre que $P(0)$ ou $P(1)$ est vraie.

8.5.2 Hérité

On suppose $P(n)$ vraie puis on démontre $P(n+1)$.

8.5.3 Conclusion

On conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$$

8.6 Exemple de récurrence

Montrons :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Initialisation Pour $n = 1$:

$$1 = \frac{1 \times 2}{2}$$

Hérédité Supposons :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Alors :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Donc la propriété est héréditaire.

9 Ensembles et logique

9.1 Inclusion

$$A \subset B$$

signifie :

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$$

9.2 Égalité de deux ensembles

$$A = B$$

signifie :

$$A \subset B \text{ et } B \subset A$$

10 Erreurs classiques

10.1 Confusion entre implication et réciproque

L'implication :

$$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$$

est vraie.

La réciproque :

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

est fausse.

10.2 Oubli des hypothèses

Exemple :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{b} \Rightarrow a = c$$

nécessite l'hypothèse :

$$b \neq 0$$

10.3 Exemple non démonstratif

Un exemple peut illustrer une propriété, mais ne constitue jamais une démonstration générale.

11 Conseils de rédaction

En mathématiques, une rédaction correcte doit être :

- claire ;
- concise ;
- rigoureuse.

Il faut :

- annoncer les hypothèses ;
- justifier chaque implication ;
- rédiger avec des phrases mathématiques complètes.

12 Exercices

12.1 Exercices élémentaires

1. Nier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$$

2. Montrer :

$$A \subset B \text{ et } B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

3. Montrer que :

$$n(n+1)$$

est pair.

12.2 Exercices intermédiaires

1. Montrer :

$$\forall n \geq 1, 2^n \geq n + 1$$

2. Montrer que la somme de deux rationnels est rationnelle.
3. Montrer :

$$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

13 Résumé

Les notions fondamentales à maîtriser en math sup sont :

- les implications ;
- les quantificateurs ;
- les négations ;
- les raisonnements par contraposée ;
- les raisonnements par l'absurde ;
- la récurrence.

La pratique régulière des démonstrations est indispensable pour progresser.