Cours de Mathématiques Supérieures

Les nombres complexes

Table des matières

1 Introduction

L'équation

$$x^2 + 1 = 0$$

n'admet aucune solution réelle.

On introduit alors un nouveau nombre, noté i, défini par :

$$i^2 = -1.$$

L'ensemble des nombres complexes est noté :

$$\mathbb{C}.$$

Tout nombre complexe s'écrit sous la forme :

$$z = a + ib,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

— a est la **partie réelle** de z,

— b est la **partie imaginaire** de z.

On note :

$$\Re(z) = a, \qquad \Im(z) = b.$$

2 Calcul algébrique

Deux complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelle et imaginaire sont égales :

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ et } b = d.$$

2.1 Addition

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d).$$

2.2 Multiplication

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Cette formule provient de la relation :

$$i^2 = -1.$$

2.3 Exemple

$$(2 + 3i)(1 - 4i)$$

$$= 2 - 8i + 3i - 12i^2$$

$$= 14 - 5i.$$

3 Conjugué

3.1 Définition

Le conjugué du complexe

$$z = a + ib$$

est :

$$\overline{z} = a - ib.$$

3.2 Propriétés

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$$

$$z\overline{z} = a^2 + b^2.$$

4 Module

4.1 Définition

Le module du complexe

$$z = a + ib$$

est :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

4.2 Propriétés

$$|zw| = |z||w|$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

$$|z|^2 = z\overline{z}.$$

5 Inverse d'un complexe

Si $z \neq 0$, alors :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

5.1 Exemple

$$\frac{1}{2 + 3i} = \frac{2 - 3i}{13}.$$

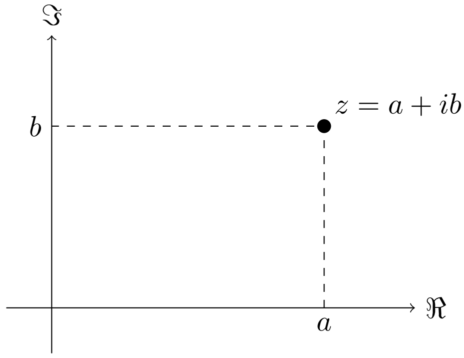
6 Plan complexe

À tout complexe

$$z = a + ib$$

on associe le point de coordonnées :

$$(a, b).$$



7 Forme trigonométrique

Soit $z \neq 0$.
On pose :

$$r = |z|.$$

Il existe un angle θ tel que :

$$\cos\theta = \frac{a}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{r}.$$

Alors :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

L'angle θ est un argument de z.
On note :

$$\theta = \arg(z).$$

8 Forme exponentielle

La formule d'Euler donne :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Ainsi :

$$z = re^{i\theta}.$$

9 Produit et interprétation géométrique

Soient :

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}.$$

Alors :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Donc :

— les modules se multiplient ;
— les arguments s'additionnent.

La multiplication complexe correspond géométriquement à :

— une rotation ;
— une homothétie.

10 Formule de Moivre

Pour tout entier n,
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

11 Racines de l'unité

Résoudre :
$$z^n = 1.$$
Les solutions sont :
$$z_k = e^{2ik\pi/n}, \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$
Ces points sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle unité.

12 Équations polynomiales

Considérons :
$$az^2 + bz + c = 0.$$
On pose :
$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

— Si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles ;
— Si $\Delta = 0$, il y a une racine double ;
— Si $\Delta < 0$, il y a deux racines complexes.

Exemple :
$$x^2 + 1 = 0$$
admet les solutions :
$$x = \pm i.$$

13 Racines n-ièmes

Résoudre :
$$z^n = re^{i\theta}.$$
Les solutions sont :
$$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

14 Géométrie complexe

14.1 Alignement

Les points d'affixes a, b, c sont alignés si :
$$\frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}.$$

14.2 Orthogonalité

$$\frac{a-c}{b-c} \in i\mathbb{R}.$$

14.3 Cercle

Le cercle de centre ω et de rayon R est :

$$|z-\omega| = R.$$

15 Erreurs classiques

- $$|a+ib| \neq |a| + |b|$$
- L'argument est défini modulo 2π.
- $$\sqrt{z_1 z_2} \neq \sqrt{z_1}\sqrt{z_2}$$

  en général.
- $$\overline{z} \neq -z.$$

16 Exercices

Exercice 1

Calculer :

$$(1+i)^5.$$

Exercice 2

Résoudre :

$$z^4 = 1.$$

Exercice 3

Déterminer les racines cubiques de :

$$8i.$$

Exercice 4

Montrer que :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

17 Conclusion

Les nombres complexes constituent un outil fondamental des mathématiques modernes.
Ils interviennent notamment en :

- analyse ;
- géométrie ;
- physique ;
- théorie du signal ;
- mécanique quantique.

Ils permettent d'unifier l'algèbre et la géométrie dans un cadre particulièrement élégant.