

# Exercices corrigés d'arithmétique

## Niveau Math Sup

### Exercice 1 — Divisibilité

Montrer que pour tout entier  $n$ , le nombre

$$n^3 - n$$

est divisible par 6.

#### Correction

On factorise :

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)$$

On obtient le produit de trois entiers consécutifs.

Parmi trois entiers consécutifs :

— l'un est divisible par 3 ;

— l'un est pair.

Le produit est donc divisible par  $2 \times 3 = 6$ .

$$6 \mid (n^3 - n)$$

### Exercice 2 — PGCD et Bézout

Calculer

$$\gcd(252, 198)$$

et déterminer des entiers  $u, v$  tels que

$$252u + 198v = \gcd(252, 198)$$

#### Correction

Algorithme d'Euclide :

$$252 = 198 + 54$$

$$198 = 3 \times 54 + 36$$

$$54 = 36 + 18$$

$$36 = 2 \times 18$$

Donc

$$\gcd(252, 198) = 18$$

Remontons les calculs :

$$18 = 54 - 36$$

et

$$36 = 198 - 3 \times 54$$

Donc

$$18 = 54 - (198 - 3 \times 54)$$

$$18 = 4 \times 54 - 198$$

Comme

$$54 = 252 - 198$$

on obtient

$$18 = 4(252 - 198) - 198$$

$$18 = 4 \times 252 - 5 \times 198$$

Ainsi,

$$u = 4, \quad v = -5$$

### Exercice 3 — Congruences

Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  :

$$7x \equiv 3 \pmod{11}$$

#### Correction

On cherche l'inverse de 7 modulo 11.

$$7 \times 8 = 56 \equiv 1 \pmod{11}$$

Donc 8 est l'inverse de 7 modulo 11.

On multiplie l'équation par 8 :

$$x \equiv 8 \times 3 \pmod{11}$$

$$x \equiv 24 \equiv 2 \pmod{11}$$

Les solutions sont

$$x = 2 + 11k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

## Exercice 4 — Petit théorème de Fermat

Calculer le reste de la division de

$$3^{100}$$

par 7.

### Correction

Le petit théorème de Fermat donne :

$$3^6 \equiv 1 \pmod{7}$$

Or

$$100 = 6 \times 16 + 4$$

Donc

$$3^{100} = (3^6)^{16} \times 3^4$$

Ainsi

$$3^{100} \equiv 1^{16} \times 3^4 \pmod{7}$$

Calculons :

$$3^2 = 9 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$3^4 \equiv 2^2 = 4 \pmod{7}$$

Donc

$$3^{100} \equiv 4 \pmod{7}$$

Le reste vaut 4.

## Exercice 5 — Nombres premiers

Montrer que si  $p$  est premier et  $p > 3$ , alors

$$p^2 - 1$$

est divisible par 24.

### Correction

On factorise :

$$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$$

Comme  $p > 3$  est premier,  $p$  est impair.

Les entiers  $p - 1$  et  $p + 1$  sont deux nombres pairs consécutifs.

L'un d'eux est divisible par 4, donc

$$8 \mid (p - 1)(p + 1)$$

Par ailleurs, parmi les trois entiers consécutifs

$$p - 1, \quad p, \quad p + 1$$

l'un est divisible par 3.

Comme  $p \neq 3$ , ce n'est pas  $p$ .

Ainsi

$$3 \mid (p - 1)(p + 1)$$

Comme 3 et 8 sont premiers entre eux,

$$24 \mid (p^2 - 1)$$

## Exercice 6 — Équation diophantienne

Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  :

$$15x + 21y = 6$$

### Correction

On calcule

$$\gcd(15, 21) = 3$$

Comme  $3 \mid 6$ , l'équation admet des solutions.

On simplifie :

$$5x + 7y = 2$$

Modulo 7 :

$$5x \equiv 2 \pmod{7}$$

Or

$$5^{-1} \equiv 3 \pmod{7}$$

car

$$5 \times 3 = 15 \equiv 1 \pmod{7}$$

Donc

$$x \equiv 6 \equiv -1 \pmod{7}$$

On prend  $x = -1$ .

Alors

$$5(-1) + 7y = 2$$

$$-5 + 7y = 2$$

$$7y = 7$$

$$y = 1$$

Une solution particulière est

$$(x_0, y_0) = (-1, 1)$$

Les solutions générales sont

$$x = -1 + 7k$$

$$y = 1 - 5k$$

avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

## Exercice 7 — Exercice classique

Déterminer tous les entiers  $n$  tels que

$$n^2 + 2$$

soit divisible par  $n + 1$ .

### Correction

Comme

$$n \equiv -1 \pmod{n+1}$$

on obtient

$$n^2 + 2 \equiv (-1)^2 + 2 = 3 \pmod{n+1}$$

Ainsi

$$n + 1 \mid n^2 + 2$$

équivalent à

$$n + 1 \mid 3$$

Donc

$$n + 1 \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

et finalement

$$n \in \{-4, -2, 0, 2\}$$