

Exercices corrigés de logique et raisonnement

Niveau Math sup

Exercice 1 — Négation d'énoncés avec quantificateurs

Nier les propositions suivantes :

1. « Tout réel positif possède une racine carrée. »
2. « Il existe un entier premier pair supérieur à 2. »
- 3.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$$

Correction

1. L'énoncé s'écrit :

$$\forall x \geq 0, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$$

Sa négation est :

$$\exists x \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 \neq x$$

2. L'énoncé s'écrit :

$$\exists p \in \mathbb{N}, (p \text{ premier}) \wedge (p \text{ pair}) \wedge (p > 2)$$

Sa négation est :

$$\forall p \in \mathbb{N}, (p \text{ non premier}) \vee (p \text{ impair}) \vee (p \leq 2)$$

3. La négation de

$$\forall x, \exists y, y > x$$

est

$$\exists x, \forall y, y \leq x$$

Exercice 2 — Implication, réciproque, contraposée

Considérons l'implication :

« Si n^2 est pair, alors n est pair. »

1. Écrire la réciproque.
2. Écrire la contraposée.
3. Démontrer l'implication initiale.

Correction

1. **Réciproque** « Si n est pair, alors n^2 est pair. »

2. **Contraposée** La contraposée est :

$$n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair}$$

3. **Démonstration** Supposons n impair.

Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$n = 2k + 1$$

Donc :

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

soit

$$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Ainsi n^2 est impair.

Donc :

$$n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}$$

Exercice 3 — Raisonnement par l'absurde

Montrer que :

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Correction

Supposons par l'absurde :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

avec $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, et la fraction irréductible.

Alors :

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

Donc :

$$p^2 = 2q^2$$

Ainsi p^2 est pair, donc p est pair.

Écrivons :

$$p = 2k$$

Alors :

$$(2k)^2 = 2q^2$$

soit

$$4k^2 = 2q^2$$

et donc

$$q^2 = 2k^2$$

Ainsi q est pair.

On obtient une contradiction avec l'irréductibilité de la fraction.

Donc :

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Exercice 4 — Raisonement par récurrence

Montrer que :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction

Initialisation Pour $n = 1$:

$$1 = \frac{1 \times 2}{2}$$

La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité Supposons :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Alors :

$$\begin{aligned} & 1 + \cdots + n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion La formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 5 — Ensembles et logique

Montrer que :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Correction

On procède par double inclusion.

Première inclusion Soit :

$$x \in A \cap (B \cup C)$$

Alors :

- $x \in A$;
- $x \in B \cup C$.

Donc :

- soit $x \in B$;
- soit $x \in C$.

Ainsi :

- soit $x \in A \cap B$;
- soit $x \in A \cap C$.

Donc :

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Inclusion réciproque Soit :

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Dans les deux cas, on a :

- $x \in A$;
- $x \in B \cup C$.

Donc :

$$x \in A \cap (B \cup C)$$

Exercice 6 — Négation d'une implication

Déterminer la négation de :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x) \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R}, y < 0)$$

Correction

La négation d'une implication $P \Rightarrow Q$ est :

$$P \wedge \neg Q$$

Donc :

$$(\forall x, x^2 \geq x) \wedge \neg(\exists y, y < 0)$$

Or :

$$\neg(\exists y, y < 0) \iff \forall y, y \geq 0$$

Ainsi :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x) \wedge (\forall y \in \mathbb{R}, y \geq 0)$$

Exercice 7 — Divisibilité

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^3 - n$$

est divisible par 6.

Correction

On factorise :

$$n^3 - n = n(n^2 - 1)$$

$$= n(n - 1)(n + 1)$$

Ce sont trois entiers consécutifs.

Parmi trois entiers consécutifs :

- l'un est divisible par 3 ;
- au moins l'un est pair.

Donc leur produit est divisible par 6.

$$6 \mid (n^3 - n)$$