

# Exercices corrigés sur les nombres complexes

Niveau Mathématiques supérieures

## Exercice 1 — Forme algébrique

Écrire sous la forme  $a + ib$  :

$$z = \frac{3 + 2i}{1 - i}$$

### Correction

On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué  $1 + i$ .

$$z = \frac{(3 + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}$$

Le dénominateur vaut :

$$(1 - i)(1 + i) = 1 + 1 = 2$$

Le numérateur :

$$(3 + 2i)(1 + i) = 3 + 3i + 2i + 2i^2$$

Or  $i^2 = -1$ , donc :

$$= 3 + 5i - 2 = 1 + 5i$$

Ainsi :

$$z = \frac{1 + 5i}{2}$$

Donc :

$$z = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

## Exercice 2 — Conjugué et module

Soit

$$z = 2 - 3i$$

Calculer :

- 1)  $\bar{z}$
- 2)  $|z|$
- 3)  $z\bar{z}$

## Correction

1) Le conjugué :

$$\boxed{\bar{z} = 2 + 3i}$$

2) Le module :

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2}$$

$$\boxed{|z| = \sqrt{13}}$$

3)

$$z\bar{z} = (2 - 3i)(2 + 3i)$$

Différence de deux carrés :

$$= 4 + 9$$

$$\boxed{z\bar{z} = 13}$$

## Exercice 3 — Forme exponentielle

Mettre sous forme exponentielle :

$$z = -1 + i$$

## Correction

Le module :

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

L'argument :

Le point  $(-1, 1)$  est dans le deuxième quadrant.

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

Donc :

$$\boxed{z = \sqrt{2} e^{i3\pi/4}}$$

## Exercice 4 — Formule de Moivre

Calculer :

$$(1 + i)^8$$

## Correction

On écrit d'abord  $1 + i$  sous forme exponentielle.

Module :

$$|1 + i| = \sqrt{2}$$

Argument :

$$\frac{\pi}{4}$$

Donc :

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

Par Moivre :

$$(1 + i)^8 = (\sqrt{2})^8 e^{i8\pi/4}$$

$$= 2^4 e^{i2\pi}$$

$$= 16$$

Ainsi :

$$\boxed{(1 + i)^8 = 16}$$

## Exercice 5 — Équation du second degré

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :

$$z^2 - 2z + 5 = 0$$

## Correction

Discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5$$

$$= 4 - 20 = -16$$

Donc :

$$\sqrt{\Delta} = 4i$$

Les solutions :

$$z = \frac{2 \pm 4i}{2}$$

Ainsi :

$$\boxed{z_1 = 1 + 2i}$$

$$\boxed{z_2 = 1 - 2i}$$

## Exercice 6 — Racines cubiques de l'unité

Résoudre :

$$z^3 = 1$$

### Correction

On écrit :

$$1 = e^{i2k\pi}$$

Les solutions sont :

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}, \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

Donc :

$$z_0 = 1$$

$$z_1 = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = e^{i4\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi :

$$\boxed{\left\{ 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}}$$

## Exercice 7 — Géométrie complexe

On considère les points :

$$A(1 + i), \quad B(3 + i), \quad C(2 + 3i)$$

Déterminer la nature du triangle  $ABC$ .

### Correction

Calculons les longueurs.

$$AB = |z_B - z_A|$$

$$= |(3 + i) - (1 + i)| = |2| = 2$$

$$AC = |(2 + 3i) - (1 + i)| = |1 + 2i| = \sqrt{5}$$

$$BC = |(2 + 3i) - (3 + i)| = |-1 + 2i| = \sqrt{5}$$

Donc :

$$AC = BC$$

Le triangle est isocèle en  $C$ .

Le triangle  $ABC$  est isocèle en  $C$

## Exercice 8 — Linéarisation

Calculer :

$$\cos^4 x$$

à l'aide des complexes.

### Correction

On utilise :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Donc :

$$\cos^4 x = \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4$$

Après développement et simplification :

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x)$$

## Exercice 9 — Lieu géométrique

Déterminer l'ensemble des points d'affixe  $z$  tels que :

$$|z - 1| = |z + 1|$$

### Correction

Cette relation signifie que le point est à égale distance de 1 et  $-1$ .

Le lieu est donc la médiatrice du segment  $[-1, 1]$ .

Dans le plan complexe :

$$\Re(z) = 0$$

c'est-à-dire l'axe imaginaire.

## Conseils de travail

Les compétences essentielles à maîtriser :

- calcul avec les conjugués ;
- passage entre formes algébrique, trigonométrique et exponentielle ;
- formule de Moivre ;
- racines  $n$ -ièmes ;
- interprétation géométrique ;
- techniques de factorisation.